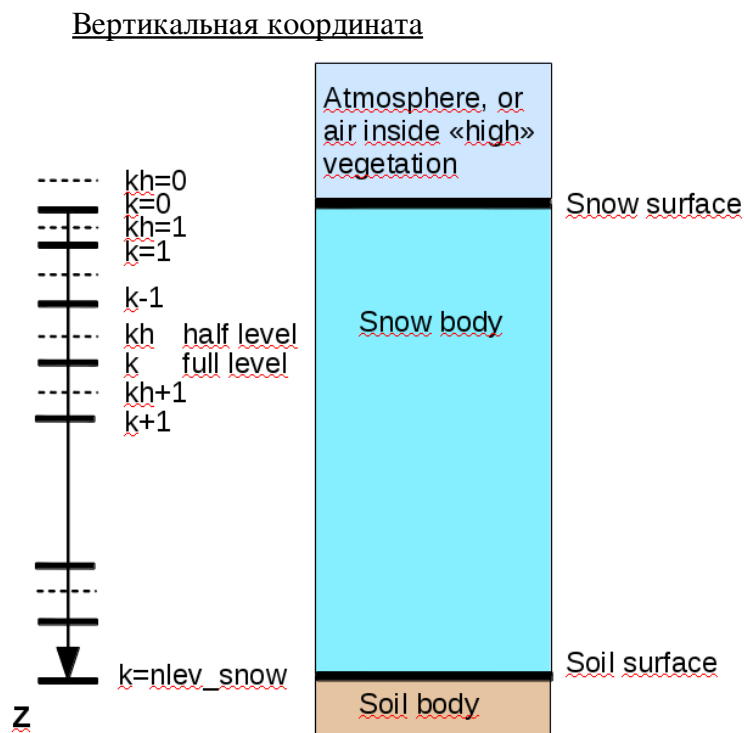


Процессы в снеге



Снег представляет собой пористую массу «льда», которая может содержать жидкую воду, образующуюся либо при таянии самой этой массы, либо при выпадении жидких осадков.

Вертикальная координата — масса на единицу площади ($\text{кг}/\text{м}^2$), поэтому общая масса снега (снег + возможная вода) на уровнях постоянна, меняется только толщина верхнего слоя. Все слои снега, кроме верхнего имеют одинаковую заданную толщину Δm , для верхнего слоя задаётся некое минимальное допустимое значение толщины Δm_{\min} , если эта толщина становится меньше заданного значения, то слоя «приплюсовывается» к нижележащему и количество уровней в снеге уменьшается на один. И наоборот: при нарастании, при достижении минимального значения верхнего слоя, он становится самостоятельным и количество уровней снега увеличивается на один.

Прогноз влагосодержания - водный баланс

Скорость стекания жидкой воды вниз по профилю снега рассчитывается так: всё жидкая вода, которая в начале шага находится на уровне k , в конце шага оказывается на уровне $k+1$. С самого нижнего уровня снега поток жидкой воды идёт в почву:

$$\Pi_{w\ kh} = \frac{m_{k-1} \cdot (1 - f_{s\ k-1})}{\Delta t},$$

где $\Pi_{w\ kh}$ — поток воды на полуцелом уровне kh $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{ с}} \right)$, m_{k-1} — масса (общая) целого уровня $k-1$ $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \right)$, $f_{s\ k-1}$ — доля ледяной фазы снега на уровне $k-1$.

На верхней границе снега:

$$m_0^{t_0+\Delta t} = m_0^{t_0} + \left(Flux_{w\ atm\ snow}^{liq} + Flux_{w\ atm}^{ice} + Flux_{v\ surf\ snow}^{turb} \right) \cdot \Delta t$$

т. е. приток вода осадков в твёрдой и жидкой фазы и приток/отток воды из-за возгонки/сублимации на поверхности снега.

Если $m_0^{t_0+\Delta t} > \Delta m + \Delta m_{min}$, то количество уровней в снеге увеличивается и все бывшие уровни «сползают вниз».

Прогноз температуры — баланс энтропии

Основное уравнение:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_s}{\partial z},$$

где S — общая энтропия среды, состоящей, в общем случае, из n компонентов:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{V} \cdot S_i,$$

где V — общий объём многокомпонентной среды, m_i и S_i — масса и удельная энтропия i -ого компонента среды.

Обычно используют 2 варианта этой формы:

$$1) \quad S = \sum_{i=1}^n q_i \rho_{\Sigma} S_i, \text{ если } q_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\Sigma}},$$

$$2) \quad S = \sum_{i=1}^n q_i \rho_i S_i, \text{ если } q_i = \frac{V_i}{V_{\Sigma}}.$$

В снеге среда состоит из двух компонентов: собственно снег (воды в твёрдой фазе) с удельной энтропией S_i и жидкой воды с удельной энтропией S_w :

$$S_i = C_i \ln \frac{T}{T_0},$$

$$S_w = C_w \ln \frac{T}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0},$$

C_w — удельная теплоёмкость воды равна $4186.8 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}} \right)$,

C_i — удельная теплоёмкость льда равна $0.5C_w$,

T_0 — температура тройной точки равна 273.15 K ,

L_i^w — удельная теплота фазового перехода лёд-вода $333560.5 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right)$.

Принимая гипотезу о том, что снег, по аналогии с почвой, это пористая среда (формообразующий компонент), в порах которого содержится жидкая вода. Тогда общий объём среды равен объёму снега (жидкая вода не добавляет объёма, а заполняет поры формообразующего компонента):

$$V = \frac{m_s}{\rho_s},$$

m_s — масса снега (кристаллической фазы), ρ_s — плотность снега. Тогда общая энтропия снега, используя первый вариант:

$$S = \frac{m_s}{V} \cdot S_i + \frac{m_w}{V} \cdot S_w = m_s \frac{\rho_s}{m_s} \cdot S_i + m_w \frac{\rho_s}{m_s} \cdot S_w = \rho_s \cdot S_i + \frac{m_w}{m_s} \rho_s \cdot S_w ,$$

m_w — масса жидкой воды.

Нам нужно найти соотношение для $\frac{m_w}{m_s}$. В принятой гипотезе $m = m_s + m_w$ — общая масса.

Вводим понятие массовой доли снега f_s , тогда:

$$m = m_w + m_s , \quad \frac{m}{m_s} = \frac{m_w}{m_s} + 1 , \quad \frac{m_w}{m_s} = \frac{m}{m_s} - 1 , \quad \frac{m_w}{m_s} = \frac{m}{m_s} - 1 , \quad \frac{m_w}{m_s} = \frac{m}{m \cdot f_s} - 1$$

$$\frac{m_w}{m_s} = \frac{1}{f_s} - 1 .$$

И итоге имеем:

$$S = \rho_s \cdot C_i \cdot \ln \frac{T}{T_0} + \left(\frac{1}{f_s} - 1 \right) \cdot \rho_s \cdot \left(C_w \cdot \ln \frac{T}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) , \text{ где}$$

$$S_i = \rho_s \cdot C_i \cdot \ln \frac{T}{T_0} - \text{удельная массовая энтропия льда} \quad \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}} \right) ,$$

$$S_w = C_w \cdot \ln \frac{T}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} - \text{удельная массовая энтропия жидкой воды} \quad \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}} \right) .$$

Поток энтропии имеет две составляющие: кондуктивная и связанная с переносом массы.

Поскольку кристаллическая часть снега является формообразующей, т. е. с ней связываем кондуктивный поток тепла, который определяется как перенос удельной энтропии кристаллического снега, при этом параметры этого переноса зависят от плотности снега:

$$\Pi_{S \text{ cond}} = \frac{\lambda_s}{C_i} \frac{\partial S_i}{\partial z} ,$$

$$\lambda_s \text{ — удельная теплопроводность снега} . \quad S = \rho_s \cdot C_i \cdot \ln \frac{T}{T_0} + \left(\frac{1}{f_s} - 1 \right) \cdot \rho_s \cdot \left(C_w \cdot \ln \frac{T}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right)$$

Согласно исследованиям J.Jin etc., 1999 (SNTHERM):

$$\lambda_s = K \cdot \rho_s^2 \quad \left(\frac{\text{Дж}}{\text{смК}} \right) , \text{ при } \rho_s = \rho_i \text{ (плотность снега равна плотности льда)}, \quad \lambda_s = \lambda_i = 2$$

$$\left(\frac{\text{Дж}}{\text{смК}} \right) , \text{ поэтому получаем:}$$

$$\lambda_s = 2.45 \cdot 10^{-6} \cdot \rho_s^2 .$$

Например, при $\rho_i = 100 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_s = 0.02 \text{ Дж/(смК)}$.

В этой же работе приводится удельное объемное теплосодержание снега как функция от его плотности:

$$C_{v \text{ s}} = 1.96 \cdot 10^6 \cdot \frac{\rho_s}{\rho_i} ,$$

но в нашем случае нужно использовать удельное массовое теплосодержание снега:

$$C_s = \frac{C_{v \text{ s}}}{\rho_s} = 1.96 \cdot 10^6 \cdot \frac{\rho_s}{\rho_i} \cdot \frac{1}{\rho_s} = 2111.1 = C_i ,$$

т. е. равно теплосодержанию льда.

Тогда для кондуктивного потока энтропии снега имеем:

$$\Pi_{S \text{ cond}} = \frac{\lambda_s(\rho_s)}{C_i} \frac{\partial S_i}{\partial z} = \rho_s \frac{\lambda_s}{C_i} \frac{\partial S_i}{\partial m},$$

ρ_s - средняя плотность среды, определим её.

Общий объём $V = \frac{m_s}{\rho_s}$ (см. выше), т. е. $V = \frac{m \cdot f_s}{\rho_s}$, тогда:

$$\rho_s = \frac{m}{V} = \frac{m \cdot \rho_s}{m \cdot f_s}$$

$$\rho_s = \frac{\rho_s}{f_s}.$$

В итоге кондуктивный поток энтропии снега равен:

$$\Pi_{S \text{ cond}} = \frac{\rho_s \lambda_s}{f_s C_i} \frac{\partial S_i}{\partial m}.$$

Поток энтропии, связанный с потоков массы в системе координат связанной с массой:

$$\Pi_{S \text{ mass}} = \Pi_w \cdot S_w - \Pi_i \cdot S_i,$$

баланс массы: сколько жидкой воды из через уровень протекло вниз, столько же (по массе) кристаллического снега должно «подняться вверх» через этот же уровень.

В итоге имеем общий поток энтропии снега:

$$\Pi_s = \frac{\rho_s \lambda_s}{f_s C_i} \frac{\partial S_i}{\partial m} + \Pi_w \cdot S_w - \Pi_i \cdot S_i.$$

Тогда прогностическое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_s}{\partial z} = \frac{\rho_s}{f_s} \frac{\partial \Pi_s}{\partial z},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\rho_s}{f_s} \cdot \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\rho_s \lambda_s}{f_s C_i} \frac{\partial S_i}{\partial m} + \Pi_w \cdot S_i + \Pi_w \cdot S_w \right).$$

Численное решение полученного прогностического уравнения

Правая часть уравнения берётся в явном виде:

$$\frac{\rho_{s \ k}}{f_{s \ k}^0} \cdot \left(\frac{\frac{\rho_{s \ kh+1}}{f_{s \ kh+1}^0} \cdot \frac{\lambda_{s \ kh+1}}{C_i} \cdot \frac{S_{i \ k+1}^0 - S_{i \ k}^0}{m_{k+1} - m_k} + \Pi_w \cdot S_{w \ k}^0 - \Pi_w \cdot S_{i \ k+1}^0}{m_{kh+1} - m_{kh}} - \frac{\frac{\rho_{s \ kh}}{f_{s \ kh}^0} \cdot \frac{\lambda_{s \ kh}}{C_i} \cdot \frac{S_{i \ k}^0 - S_{i \ k-1}^0}{m_k - m_{k-1}} + \Pi_w \cdot S_{w \ k-1}^0 - \Pi_w \cdot S_{i \ k}^0}{m_{kh+1} - m_{kh}} \right) = A$$

Левая часть:

$$\frac{\rho_{s \ k} C_i \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + \left(\frac{1}{f_{s \ k}^{\Delta t}} - 1 \right) \rho_{s \ k} \left(C_w \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + L_i^w \right) - \rho_{s \ k} C_i \ln \frac{T_k^0}{T_0} + \left(\frac{1}{f_{s \ k}^0} - 1 \right) \rho_{s \ k} \left(C_w \ln \frac{T_k^0}{T_0} + L_i^w \right)}{\Delta t}.$$

Обозначим

$$B = \rho_{s \ k} C_i \ln \frac{T_k^0}{T_0} + \left(\frac{1}{f_{s \ k}^0} - 1 \right) \rho_{s \ k} \left(C_w \ln \frac{T_k^0}{T_0} + L_i^w \right), \text{ тогда получим уравнение:}$$

$$\rho_{s\ k} C_i \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + \left(\frac{1}{f_{s\ k}^{\Delta t}} - 1 \right) \rho_{s\ k} \left(C_w \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + L_i^w \right) = A \cdot \Delta t + B ,$$

где A и B — члены, вычисляемые по значениям переменных в начале шага по времени. У нас остаются два неизвестных $\ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0}$ и $f_{s\ k}^{\Delta t}$, полученное уравнение можно расписать либо относительно одного неизвестного, либо относительно другого:

$$\ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} = \frac{A \cdot \Delta t + B - \rho_{s\ k} \cdot \frac{L_i^w}{T_0} \cdot \left(\frac{1}{f_{s\ k}^{\Delta t}} - 1 \right)}{\rho_{s\ k} \cdot \left[C_i + C_w \cdot \left(\frac{1}{f_{s\ k}^{\Delta t}} - 1 \right) \right]} ,$$

$$f_{s\ k}^{\Delta t} = \frac{1}{\frac{A \cdot \Delta t - \rho_{s\ k} \cdot C_i \cdot \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0}}{\rho_{s\ k} \cdot \left(C_w \cdot \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right)} + 1} .$$

Чтобы решить уравнение с двумя неизвестными нужно дополнить систему уравнений неким соотношением между двумя искомыми неизвестными, предполагая, что температура снега никогда не может быть выше нуля градусов $T_k^{\Delta t} \leq T_0$. Для этого предложим следующий алгоритм:

- 1) Если $f_{s\ k}^0 = 1$, то предполагаем, что и $f_{s\ k}^{\Delta t} = 1$ и рассчитываем $T_k^{\Delta t}$:
 - 1.1) Если полученное $T_k^{\Delta t} \leq T_0$, то уравнение решено.
 - 1.2) Если полученное $T_k^{\Delta t} > T_0$, то предполагаем, что $T_k^{\Delta t} = T_0$ и рассчитываем $f_{s\ k}^{\Delta t}$, уравнение решено.
- 2) Если $f_{s\ k}^0 < 1$, то предполагаем, что $T_k^{\Delta t} = T_0$ и рассчитываем $f_{s\ k}^{\Delta t}$:
 - 2.1) Если полученное $f_{s\ k}^{\Delta t} \leq 1$, то уравнение решено.
 - 2.2) Если полученное $f_{s\ k}^{\Delta t} > 1$, то предполагаем, что $f_{s\ k}^{\Delta t} = 1$ и рассчитываем $T_k^{\Delta t}$, уравнение решено.

Плотность снега — диагностическое уравнение

В построенной схеме предполагается, что известно значение плотности снега. Эта величина считается непрогностической, а определяется диагностически, используя следующие предположения.

- 1) Плотность снега не может меняться быстрее чем, 10% за 1 сутки.
- 2) Вновь образовавшийся снег имеет некую заданную плотность $\rho_{snow}^{fresh} = 100 \frac{кг}{м^3}$.
- 3) Плотность старого (слежавшегося) снега не может превышать некое заданное значение $\rho_{snow}^{old} = 700 \frac{кг}{м^3}$.
- 3) Плотность снега, подвергавшегося фазовым переходам не может превышать некое

заданное значение $\rho_{snow}^{firm} = 800 \frac{кг}{м^3}$.

5) Плотность снега зависит от:

5.1) суммарного возраста снега, исчисляемого в сутках - snow_age;

5.2) суммарного периода, когда снег подвергался процессам фазового перехода (таяние/перезаморозание), исчисляемого в сутках- snow_melt_age;

5.3) глубины уровня в массовой координате $\frac{кг}{м^2}$.

В принятых предположениях строим следующий алгоритм диагностического определения плотности снега в конце каждого шага по времени на уровнях снежного покрова.

$\rho_{s\ k}^0$ И $\rho_{s\ k}^{\Delta t}$ - плотность снега на уровне k в начале и в конце шага по времени.

$$\rho_1 = \max \left\{ \min \left[\frac{snow_age^{0.3}}{365^{0.3}}, 1 \right] \cdot \rho_{snow}^{old}, \rho_{snow}^{fresh} \right\},$$

$$\rho_2 = \max \left\{ \min \left[\frac{(snow_melt_age + 30)^{0.3}}{365^{0.3}}, 1 \right] \cdot \rho_{snow}^{firm}, \rho_1 \right\},$$

$$K_{depth} = \min \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_k}{100} \right)^{0.5}, 1.5 \right\},$$

K_{depth} — эмпирический коэффициент, определяющий зависимость плотности снега от глубины, m — глубина уровня k по оси вертикальной массовой координате $\frac{кг}{м^2}$.

$$\rho_{s\ k}^{\Delta t} = \min \left\{ \rho_2 \cdot K_{depth}, \rho_{snow}^{firm} \right\}.$$

$$K_{rate} = 0.1 \cdot \frac{\Delta t}{1440},$$

Δt - шаг по времени (с), 1440 секунд = 1 сутки.

Окончательно определяем:

1) Если снег уплотняется $\rho_{s\ k}^{\Delta t} \geq \rho_{s\ k}^0$, то $\rho_{s\ k}^{\Delta t} = \min \left\{ \rho_{s\ k}^{\Delta t}, \rho_{s\ k}^0 \cdot (1 + K_{rate}) \right\}$.

2) Если снег разрыхляется $\rho_{s\ k}^{\Delta t} < \rho_{s\ k}^0$, то $\rho_{s\ k}^{\Delta t} = \max \left\{ \rho_{s\ k}^{\Delta t}, \rho_{s\ k}^0 \cdot (1 - K_{rate}) \right\}$.

Ниже приведены примеры расчёта различных факторов, влияющих на плотность снега.

