

Температура в почве (перенос тепла, фазовые переходы)

Основное уравнение: $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_s}{\partial z}$,

где S — энтропия почвы $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{К м}^3}\right)$, Π_s — кондуктивный поток энтропии $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{К м}^2 \text{ с}}\right)$.

При рассмотрении процесса переноса тепла в почве учитывается только чисто почвенная составляющая энтропии:

$$S = \rho_{S_{wet}} S_{S_{wet}}, \quad S_{S_{wet}} = C_{S_{wet}} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right), \quad \Pi_s = \frac{\lambda_{S_{wet}}}{C_{S_{wet}}} \frac{\partial S_{S_{wet}}}{\partial z},$$

где:

T — температура почвы (K), меняется во времени и по вертикали,

$\rho_{S_{wet}}$ — плотность влажной почвы $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$, меняется во времени и по вертикали,

$C_{S_{wet}}$ — удельная теплоёмкость влажной почвы $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}\right)$, меняется во времени и по вертикали,

$\lambda_{S_{wet}}$ — удельная теплопроводность влажной почвы $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{см К}}\right)$, меняется во времени и по вертикали.

$$\rho_{S_{wet}} = \rho_s + q((1 - f_{ice})\rho_w + f_{ice}\rho_i), \quad C_{S_{wet}} = C_s + q((1 - f_{ice})C_w + f_{ice}C_i)$$

q — общее удельное объёмное влагосодержание почвы $\left(\frac{\text{м}^3}{\text{м}^3}\right)$, меняется во времени и по вертикали,

f_{ice} — доля ледяной фазы в общем удельном влагосодержании почвы, меняется во времени и по вертикали,

ρ_s — плотность сухой почвы $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$, зависит от свойств почвы (текстуры), меняется по вертикали, интервал значений от 400 у торфа до 1600 у глины,

C_s — удельная теплоёмкость сухой почвы $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}\right)$, зависит от свойств почвы (текстуры), меняется по вертикали, интервал значений от 900 у песка до 2100 у глины,

ρ_w — плотность воды равна 1000 $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$,

ρ_i — плотность льда равна 900 $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$,

C_w — удельная теплоёмкость воды равна 4186.8 $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}\right)$,

C_i — удельная теплоёмкость льда равна $0.5C_w$,

T_0 — температура тройной точки равна 273.15 K.

Удельная теплопроводность влажной почвы

$\lambda_{S_{wet}}$ является функцией гидравлического потенциала почвы $\Psi(m)$ (см. раздел

«Влагосодержание почвы»):

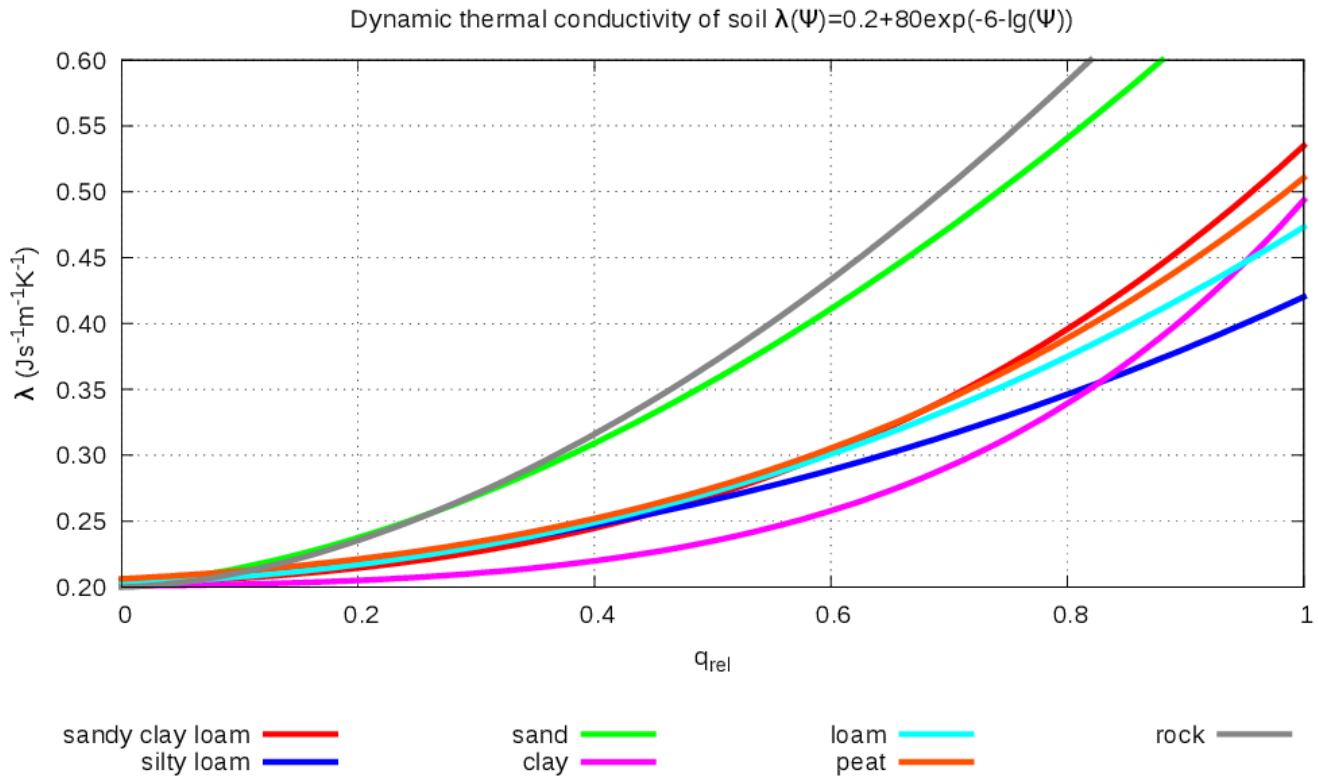
если $f_{ice} < 1$, то $\lambda_{Swet} = \min[0.2 + 300 \cdot \exp(-6 - \log_{10}|\Psi|), 2.5] + q f_{ice} \lambda_i$,

если $f_{ice} = 1$ (вся почвенная влага замёрзла), то $\lambda_{Swet} = q \lambda_i$,

$\lambda_{Swet} = \min(\lambda_{Swet}, 2.5)$,

λ_i - теплопроводность льда равна $2 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{смК}} \right)$, в то время как теплопроводность воды равна

$0.6 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{смК}} \right)$.



Доля ледяной фазы почвенной воды

Для определения доли ледяной фазы в общем удельном влагосодержании почвы f_{ice} используется эмпирическая формула:

$$f_{ice} = -\tanh[(T - T_0) \cdot c \cdot b] \quad \text{или} \quad f_{ice} = -\tanh\left[\left(\ln \frac{T}{T_0}\right) \cdot a \cdot b\right],$$

где $T_0 - 30 \leq T \leq T_0$, $T_{freez} = T_0 - 30$ - критическая температура, ниже которой вся влага находится

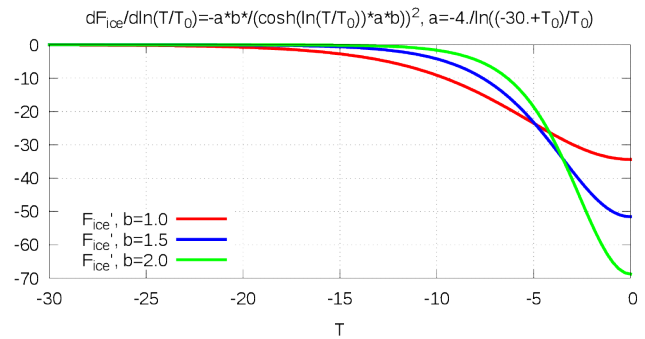
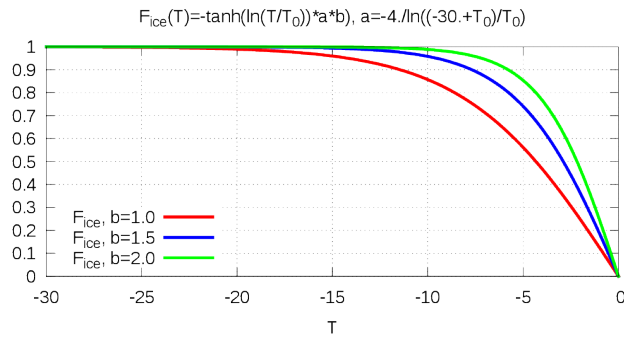
в ледяной фазе, $c = \frac{-4}{-30}$, $a = \frac{-4}{\ln \frac{T_0 - 30}{T_0}}$, a и c определяют термодинамический режим и не

зависят от свойств почвы, а b зависит от свойств почвы и колеблется в интервале $1 \leq b \leq 2$.

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\frac{d \tanh(x)}{dx} = \operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

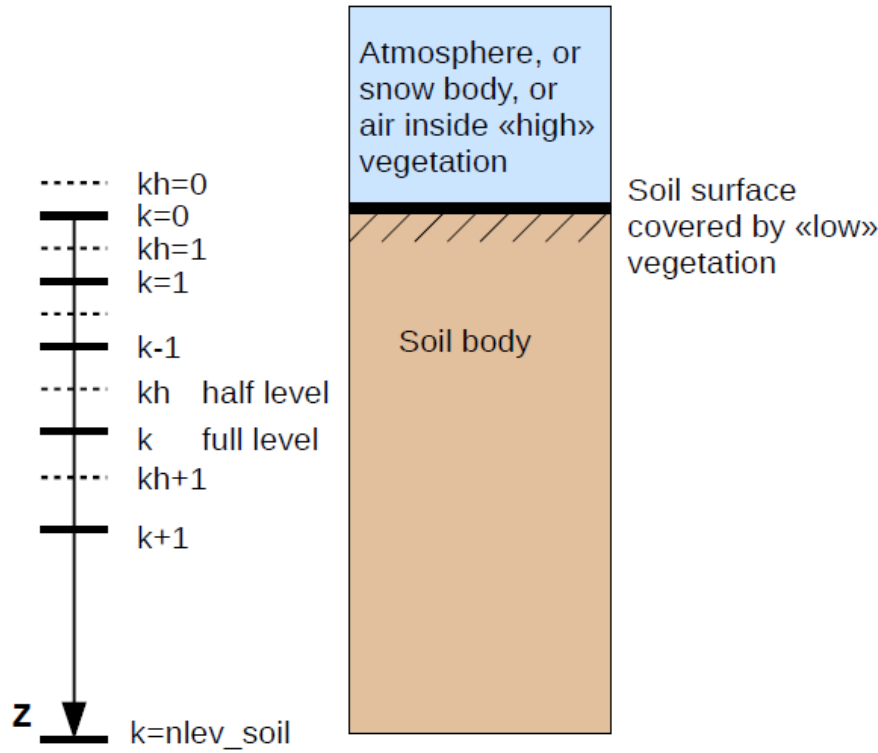
$$\frac{df_{ice}}{d \ln \frac{T}{T_0}} = \frac{-a \cdot b}{\cosh^2 \left[\left(\ln \frac{T}{T_0} \right) \cdot a \cdot b \right]}$$



Итак, основными прогностическими переменными являются температура T и доля ледяной фазы f_{ice} , которая сама зависит от T .

Рассмотрим численное решение основного уравнения.

Вводим определение сетки с использованием целых уровней, на которых ищется решение для основных переменных, и понятие полужелых уровней, на которых определяются потоки.



При использовании явной схемы для аппроксимации пространственных производных (потоков и их производных), основное уравнение принимает конечно-разностный вид:

$$\frac{\rho_{Swet}^k C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^*}{T_0} - \rho_{Swet}^k C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^0}{T_0}}{\Delta t} = \frac{\frac{\lambda_{Swet}^{kh+1} C_{Swet}^{k+1} \ln \frac{T_{k+1}^0}{T_0} - C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^0}{T_0}}{C_{Swet}^{kh+1} (z_{k+1} - z_k)} - \frac{\frac{\lambda_{Swet}^{kh} C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^0}{T_0} - C_{Swet}^{k-1} \ln \frac{T_{k-1}^0}{T_0}}{C_{Swet}^{kh} (z_k - z_{k-1})}}{z_{kh+1} - z_{kh}},$$

где T_k^* - температура почвы на уровне k после учёта кондуктивного притока тепла, но без учёта возможных фазовых переходов. Тогда для расчёта этой переменной имеем:

$$\rho_{Swet}^k C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^*}{T_0} = \rho_{Swet}^k C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^0}{T_0} + \Delta t \frac{\frac{\lambda_{Swet}^{kh+1} C_{Swet}^{k+1} \ln \frac{T_{k+1}^0}{T_0} - C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^0}{T_0}}{C_{Swet}^{kh+1} (z_{k+1} - z_k)} - \frac{\lambda_{Swet}^{kh} C_{Swet}^k \ln \frac{T_k^0}{T_0} - C_{Swet}^{k-1} \ln \frac{T_{k-1}^0}{T_0}}{C_{Swet}^{kh} (z_k - z_{k-1})}{z_{kh+1} - z_{kh}}$$

Таким образом мы определяем какова будет температура после учёта кондуктивного переноса тепла (энтропии).

Определённая таким образом температура T_k^* должна быть скорректирована с учётом возможных фазовых переходов. Данный учёт производится по принципу сохранения энтропии в системе, где эти фазовые переходы имеют место, т.е. в начале и в конце энтропии равны. До начала фазовых переходов почвенной воды имеет энтропию система почвенная вода + почвенный лёд:

$$\left\{ \rho_w (q_k - q_{icek}^0) \left(C_w \ln \frac{T_k^*}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q_{icek}^0 C_i \ln \frac{T_k^*}{T_0} \right\} \cdot (z_{kh+1} - z_{kh}) = S_k \quad ,$$

где q_k — общее влагосодержание почвы на уровне k , q_{icek}^0 — влагосодержание ледяной фазы почвы на уровне k до начала фазовых переходов, L_i^w — удельная теплота фазового перехода лёд-вода $333560.5 \left(\frac{Дж}{кг} \right)$.

$$\left\{ \rho_w q_k \left(1 - f_{icek}^{\Delta t} \left(T_k^{\Delta t} \right) \right) \left(C_w \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q_k f_{icek}^{\Delta t} \left(T_k^{\Delta t} \right) C_i \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} \right\} \cdot (z_{kh+1} - z_{kh}) = S_k \quad ,$$

$T_k^{\Delta t}$ — окончательное значение температуры на уровне k в конце шага по времени после учёта возможных фазовых переходов воды, $f_{icek}^{\Delta t}$ — соответствующая данной температуре доля ледяной фазы в общем влагосодержании на уровне k в конце шага по времени.

Правая часть последнего уравнения определяется предыдущим уравнением. Последнее уравнение является основным прогностическим, но поскольку в него входят две неизвестные переменные $T_k^{\Delta t}$ и $f_{icek}^{\Delta t}$, которые между собой связаны эмпирическим соотношением, приведённым выше, то мы имеем систему из двух уравнений с двумя переменными. Эту систему уравнений:

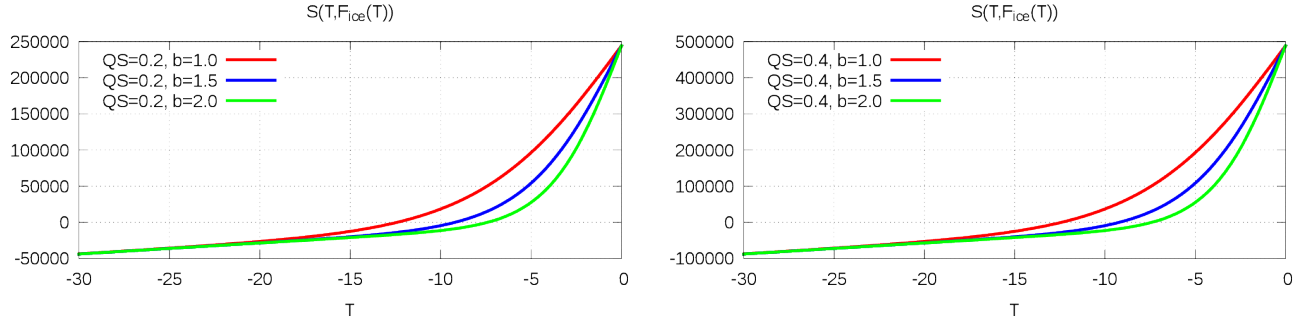
$$\left\{ \begin{aligned} \rho_w q_k \left(1 - f_{icek}^{\Delta t} \left(T_k^{\Delta t} \right) \right) \left(C_w \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q_k f_{icek}^{\Delta t} \left(T_k^{\Delta t} \right) C_i \ln \frac{T_k^{\Delta t}}{T_0} &= \frac{S_k}{z_{kh+1} - z_{kh}} \\ f_{ice} &= -\tanh \left[\left(\ln \frac{T}{T_0} \right) \cdot c \cdot b \right] \end{aligned} \right.$$

В интервале температур $T < T_{freez} - \Delta T$, $f_{icek}^{\Delta t} = 1$ или $T > T_0 + \Delta T$, $f_{icek}^{\Delta t} = 0$ (ΔT - некий условный интервал «гарантии», например, $2K$), когда невозможны фазовые переходы почвенной воды, решение считается найденным:

$$\begin{aligned} T_k^{\Delta t} &= T_k^* , \\ \begin{cases} f_{icek}^{\Delta t} = 0, & \text{if } T_k^{\Delta t} < T_{freez} - \Delta T \\ f_{icek}^{\Delta t} = 1, & \text{if } T_k^{\Delta t} > T_0 + \Delta T \end{cases} \end{aligned}$$

В интервале температур $T_{freez} - \Delta T \leq T \leq T_0 + \Delta T$, $f_{icek}^{\Delta t}(T)$, когда возможны фазовые переходы почвенной воды, систему уравнений решаем методом последовательных приближений, т.е. методом итераций.

Рассмотрим интерактивный алгоритм. Мы имеем некоторую функцию F от переменных $T_k^{\Delta t}$ и $f_{icek}^{\Delta t}$, при этом $f_{icek}^{\Delta t}$ является функцией $T_k^{\Delta t}$, т. е. $F(T_k^{\Delta t}, f_{icek}^{\Delta t}(T_k^{\Delta t}))$. Поскольку данная функция является монотонной и гладкой:



итеративная процедура поиска значений переменных $T_k^{\Delta T}$ и $f_{icek}^{\Delta T}$, отвечающих условию системы уравнений, будет организована с помощью метода Ньютона:

$$F^* = F^0 + \left. \frac{dF}{dT} \right|_{T^0} (T^* - T^0),$$

где F^0 и T^0 — начальные значения переменной и функции и F^* и T^* — значения на следующей итерации. Тогда получаем:

$$T^* = T^0 + \frac{F^* - F|_{T^0}}{\left. \frac{dF}{dT} \right|_{T^0}} \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{T^*}{T^0}\right) = \ln\left(\frac{T^0}{T^0}\right) + \frac{F^* - F|_{T^0}}{\left. \frac{dF}{d\ln\left(\frac{T}{T^0}\right)} \right|_{\ln\left(\frac{T^0}{T^0}\right)}},$$

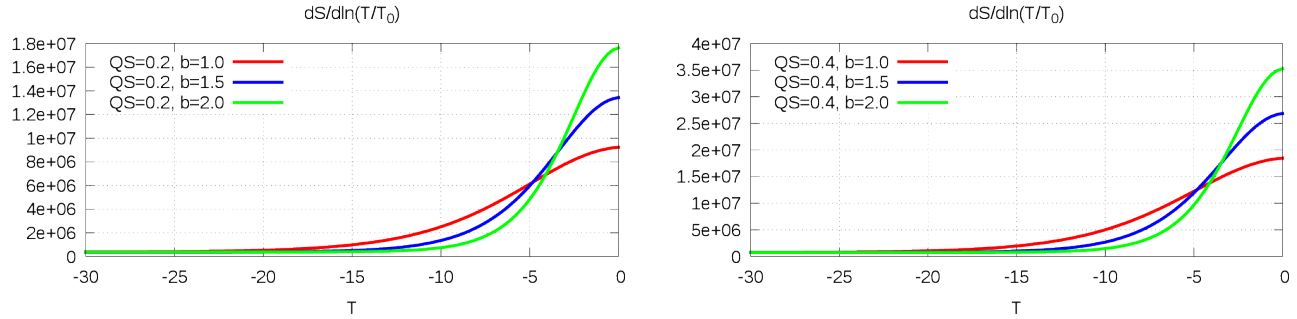
где

$$F = \rho_w q_k (1 - f_{icek}(T_k)) \left(C_w \ln \frac{T_k}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q_k f_{icek}(T_k) C_i \ln \frac{T_k}{T_0},$$

$$\frac{dF}{d\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} = q_k \left\{ \rho_w C_w - \frac{df_{icek}}{d\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} \cdot \rho_w \cdot \frac{L_i^w}{T_0} - \left[\frac{df_{icek}}{d\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} \cdot \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + f_{ice} \right] \cdot [\rho_w C_w - \rho_i C_i] \right\},$$

если $\frac{dF}{d\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} = 0$ и $T^* \geq 0$, то $T^* = \Delta T$;

если $\frac{dF}{d\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} = 0$ и $T^* < 0$, то $T^* = -30 - \Delta T$;



На каждой итерации используем значение функции, к которому стремимся: $F^*=S_k$.

Решение считается найденным, если на очередной итерации выполнено условие $|T^*-T^0|<\Delta$, тогда $T_k^{\Delta t}=T^*$, где Δ — некоторая заданная точность решения.

Полученное значение $T_k^{\Delta t}$ является прогностическим значение температуры почвы на уровне k в конце текущего шага по времени после учета кондуктивного переноса тепла в почве и возможных фазовых переходов почвенной воды.

На контакте со снегом нужно ввести учёт фазового перехода воды в нижнем полуслое снега. Для этого для почвенного уровня $k=0$ на контакте со снегом (если он есть) добавляем половинку нижнего слоя снега (см. главу «Процессы в снеге»):

$$\left\{ \rho_w (q|_{k=0} - q_{ice}^0|_{k=0}) \left(C_w \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q_{ice}^0|_{k=0} C_i \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} \right\} \cdot (z|_{kh=1}) +$$

$$+ \left\{ \rho_w C_i \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} + \left(\frac{1}{f_s^0|_{k=0} \quad k=nlev_snow} - 1 \right) \rho_w \left(C_w \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} + L_i^w \right) \right\} \cdot \left(\frac{m_{snow}^{bottom}}{\rho_w} \right) = S|_{k=0},$$

$$\left\{ \rho_w q|_{k=0} (1 - f_{ice}^0|_{k=0}) \left(C_w \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q|_{k=0} f_{ice}^0|_{k=0} C_i \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} \right\} \cdot \Delta z +$$

$$+ \left\{ C_i \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} + \left(\frac{1}{f_s^0|_{k=0} \quad k=nlev_snow} - 1 \right) \left(C_w \ln \frac{T^*|_{k=0}}{T_0} + L_i^w \right) \right\} \cdot m_{snow}^{bottom} = S|_{k=0}$$

f_s — доля кристаллической фазы снега. Аналогичное уравнение имеем для момента времени Δt : T^* заменяем на $T^{\Delta t}$, f_{ice}^0 на $f_{ice}^{\Delta t}$, f_s^0 на $f_s^{\Delta t}$, правая часть остаётся той же.

По аналогии для почвы имеем систему уравнений, с $k=0$ (для снега $k=0$ совпадает с $k=nlev_snow$)

Тогда в итерационном алгоритме имеем:

$$F = \left\{ \rho_w q_k (1 - f_{ice \ k}(T_k)) \left(C_w \ln \frac{T_k}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + \rho_i q_k f_{ice \ k}(T_k) C_i \ln \frac{T_k}{T_0} \right\} \cdot \Delta z +$$

$$+ \left\{ \left(\frac{1}{f_{s \ k}(T_k)} - 1 \right) \left(C_w \ln \frac{T_k}{T_0} + \frac{L_i^w}{T_0} \right) + C_i \ln \frac{T_k}{T_0} \right\} \cdot m_{snow}^{bottom},$$

$$\frac{dF}{d \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} = \Delta z q_k \left\{ \rho_w C_w - \frac{df_{icek}}{d \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} \cdot \rho_w \cdot \frac{L_i^w}{T_0} - \left[\frac{df_{icek}}{d \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} \cdot \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + f_{ice} \right] \cdot [\rho_w C_w - \rho_i C_i] \right\} +$$

$$+ m_{snow}^{bottom} \left\{ \frac{-1}{f_{sk}^2} \frac{df_{sk}}{d \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)} \cdot \left[C_w \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{L_i^w}{T_0} \right] + \left[\frac{1}{f_{sk}} - 1 \right] \cdot C_w + C_i \right\}$$

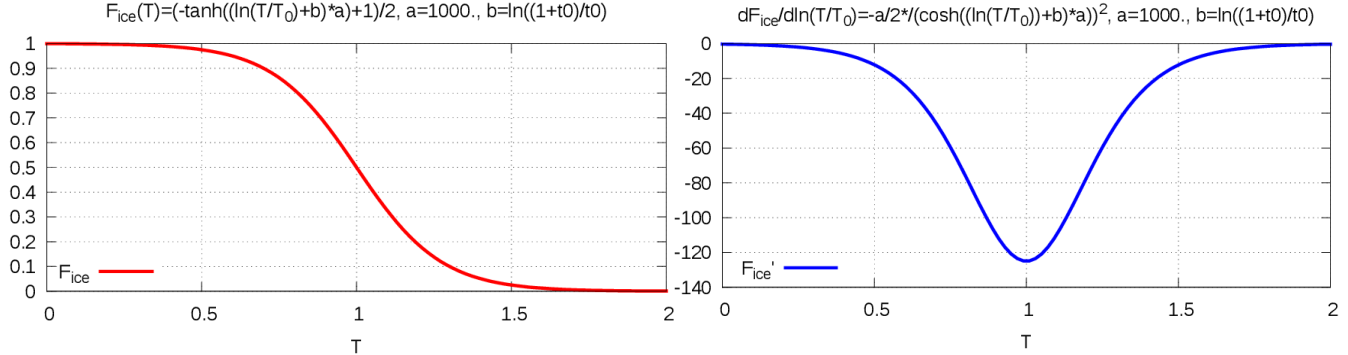
Для гладкости функций при применении метода Ньютона необходимо ввести гладкие функции для доля ледяной фазы снега (f_s) от температуры и для её производной по температуре. По аналогии с ледяной фазой почвенной воды определяем такую функцию.

Эмпирическая формула:

$$f_s = \frac{-\tanh\left[\left(\ln\frac{T}{T_0} + b\right) \cdot a\right] + 1}{2},$$

где $T_0 \leq T \leq T_0 + 2$, при $T < T_0$ доля равна единице, при $T > T_0 + 2$ равна 0.000687, $a = 1000$, $b = \ln((1 + T_0)/T_0) = -0.003654307$,

$$\frac{df_s}{d \ln\frac{T}{T_0}} = \frac{-a}{2 \cdot \cosh^2\left[\left(\ln\frac{T}{T_0} + b\right) \cdot a\right]}.$$



Итак, основными прогностическими переменными на контакте почвы-снег являются температура T , доля ледяной фазы f_{ice} почвы и доля ледяной фазы f_s снега, которые зависят от T .