

## Вода в почве (перенос воды)

Основное уравнение — это следствие закона Дарси (Darcy):

$$q = -\frac{K}{\mu} \nabla P ,$$

где  $q$  — поток жидкости на единицу площади  $\left(\frac{M}{c}\right)$ ,  $\nabla P$  - градиент давления  $\left(\frac{Pa}{m}\right)$ ,  $\mu$  — вязкость ( $Pa \cdot c$ ),  $K$  - площадь сечения ( $m^2$ ).

В применении к переносу почвенной воды закон Дарси принимает вид:

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = K \nabla^2 h - G ,$$

где

$$h \text{ — hydraulic head} = \frac{E(\text{энергия жидкости})}{W(\text{вес жидкости})} ,$$

$$S_s \text{ — specific storage} = \frac{V \text{ drained water}}{V \text{ total materail}} = q_{max} \left( \frac{M^3}{M^3} \right) ,$$

$$K \text{ - hydraulic conductivity} \left( \frac{M}{c} \right) ,$$

$G$  — источники и стоки жидкости (source terms).

Если примем, что  $G=0$  и  $\partial x = \partial y = 0$ , то получим:

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} .$$

В привычной «почвенной» терминологии это основное прогностическое (для влагосодержания) уравнение выглядит так:

$$q_{max} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \Psi}{\partial z} , \quad K \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\Pi_w}{\rho_w} ,$$

$$q_{max} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \left( \frac{\Pi_w}{\rho_w} \right)}{\partial z}$$

$$\Pi_w \text{ — поток массы воды} \left( \frac{kg}{m^2 c} \right) ,$$

$$\rho_w \text{ — плотность воды равна } 1000 \left( \frac{kg}{m^3} \right) .$$

где:

$\Psi$  — гидравлический потенциал почвы ( $m$ ) (тоже самое, что  $h$ ), является функцией влагосодержания, доли ледяной фазы и физических параметров почвы,

$K$  — гидравлическая проводимость почвы, является функцией влагосодержания, доли ледяной фазы и физических параметров почвы  $\left( \frac{M}{c} \right)$ ,

$q_{max}$  — максимальное значение удельного объёмного влагосодержания почвы  $\left( \frac{M^3}{M^3} \right)$  (когда все

поры заполнены водой), зависит от текстуры почвы: от 0.4 у песка до 0.6 у торфа, меняется по вертикали.

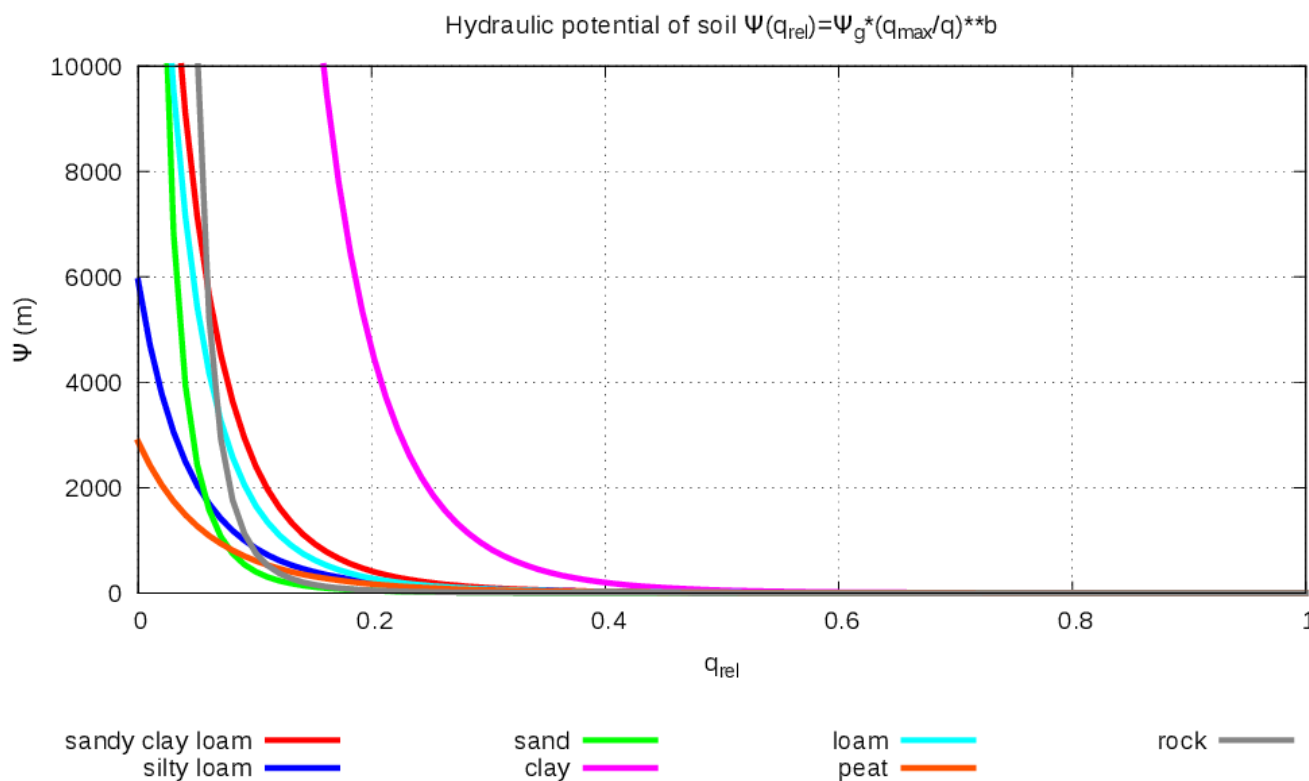
Данное уравнение оперирует гидравлическим потенциалом почвы, в то время как основным прогностическим параметром влагосодержания почвы является  $q$  — общее удельное объёмное влагосодержание почвы  $\left(\frac{M^3}{M^3}\right)$ , меняется во времени и по вертикали, поэтому необходимо выразить  $\Psi$  через  $q$ .

Гидравлический потенциал почвы

$$\Psi = \Psi_g \left( \frac{q_{max} - f_{ice} q}{q - f_{ice} q} \right)^b \cdot \left( \frac{q_{max}}{q_{max} - f_{ice} q} \right)^c,$$

$q$  — общее удельное объёмное влагосодержание почвы  $\left(\frac{M^3}{M^3}\right)$ , меняется во времени и по вертикали,

$\Psi_g$  — гидравлический потенциал почвы при насыщении её водой (при  $q=q_{max}$ ), зависит от текстуры почвы: от -0.79 м у «*silty loam*» до -0.09 м у «*loamy sand*», меняется по вертикали,  $c$  - безразмерный физический параметр почвы, может быть принят как зависящий от текстуры почвы, в данном случае принят постоянной величиной  $c \equiv 3$ .



Рассмотрим производную по времени  $\Psi$  в левой части основного прогностического уравнения в предположении, что при данном процессе (переноса воды) доля ледяной фазы почвенной воды остаётся постоянной ( $\frac{\partial f_{ice}}{\partial t} = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^b \right\} &= b \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^{b-1} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (q_{\max} - f_{ice} q) \cdot (q(1-f_{ice}))^{-1} \right\} = \\ &= b \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^{b-1} \left[ -f_{ice} \frac{\partial q}{\partial t} [q(1-f_{ice})]^{-1} + (q_{\max} - f_{ice} q)(-1) \cdot [q(1-f_{ice})]^{-2} \frac{\partial q}{\partial t} \right] = \\ &= -\frac{\partial q}{\partial t} \cdot b \cdot \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^{b-1} \cdot \left[ \frac{f_{ice}}{q(1-f_{ice})} + \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{[q(1-f_{ice})]^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^c \right\} &= c \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right\} = \\ &= c \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot (-q_{\max}) [q_{\max} - f_{ice} q]^{-2} \cdot \left[ -f_{ice} \frac{\partial q}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{\partial q}{\partial t} \cdot c \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot \frac{q_{\max} f_{ice}}{[q_{\max} - f_{ice} q]^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \Psi_g \cdot \left\{ -b \cdot \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^{b-1} \cdot \left[ \frac{f_{ice}}{q(1-f_{ice})} + \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{[q(1-f_{ice})]^2} \right] \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^c + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^b \cdot c \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot \frac{q_{\max} f_{ice}}{[q_{\max} - f_{ice} q]^2} \right\}, \end{aligned}$$

тогда основное прогностическое уравнение для  $q$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} \cdot q_{\max} \cdot \Psi_g \cdot \left\{ -b \cdot \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^{b-1} \cdot \left[ \frac{f_{ice}}{q(1-f_{ice})} + \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{[q(1-f_{ice})]^2} \right] \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^c + \right. \\ \left. + \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^b \cdot c \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot \frac{q_{\max} f_{ice}}{[q_{\max} - f_{ice} q]^2} \right\} &= \frac{\partial \left( \frac{\Pi_w}{\rho_w} \right)}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q_{\max} \cdot \Psi_g \cdot \left\{ -b \cdot \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^{b-1} \cdot \left[ \frac{f_{ice}}{q(1-f_{ice})} + \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{[q(1-f_{ice})]^2} \right] \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^c + \left[ \frac{q_{\max} - f_{ice} q}{q(1-f_{ice})} \right]^b \cdot c \cdot \left[ \frac{q_{\max}}{q_{\max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot \frac{q_{\max} f_{ice}}{[q_{\max} - f_{ice} q]^2} \right\}}{\frac{\partial \left( \frac{\Pi_w}{\rho_w} \right)}{\partial z}}$$

где  $\frac{\Pi_w}{\rho_w} = K \frac{\partial \Psi}{\partial z}$

Примем это уравнение за основное.

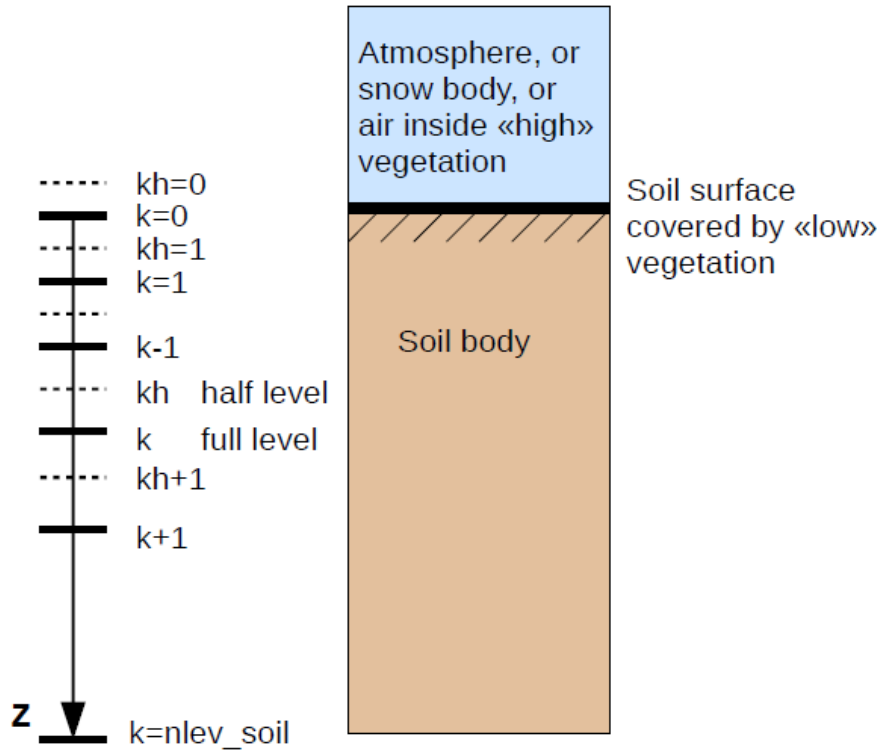
#### Гидравлическая проводимость почвы

$$K = K_g \left( \frac{q - f_{ice} q}{q_{\max} - f_{ice} q} \right)^{2b+3},$$

$f_{ice}$  — доля ледяной фазы в общем удельном влагосодержании почвы, меняется во времени и по вертикали, в данной контексте не меняется по времени, считается определённый при учёте фазовых переходов воды в почве (см. раздел «Температура в почве»),  
 $b$  — безразмерный физический параметр почвы, зависящий от текстуры почвы: от 4.05 у песка до 11.40 у глины, меняется по вертикали,  
 $K_g$  - гидравлическая проводимость почвы при насыщении её водой (при  $q=q_{max}$ ), зависит от текстуры почвы: от  $10^{-7}$  у глины до  $10^{-4}$  у песка, меняется по вертикали.

### Численное решение основного уравнения

Вводим определение сетки с использованием целых уровней, на которых ищется решение для основных переменных, и понятие полуцелых уровней, на которых определяются потоки.



При использовании явной схемы для аппроксимации пространственных производных (потоков и их производных), основное уравнение принимает конечно-разностный вид:

$$\frac{q_k^{\Delta t} - q_k^0}{\Delta t} = \frac{\frac{\Pi_{wkh+1}^0}{\rho_w} - \frac{\Pi_{wkh}^0}{\rho_w}}{z_{kh+1} - z_{kh}} \cdot \frac{1}{A_k^0(q_k^0, f_{icek}^0, \Psi_{gk}, q_{maxk})},$$

где  $A$  — это знаменатель правой части основного уравнения:

$$A = q_{max} \cdot \Psi_g \cdot \left( -b \cdot \left[ \frac{q_{max} - f_{ice} q}{q(1 - f_{ice})} \right]^{b-1} \cdot \left[ \frac{f_{ice}}{q(1 - f_{ice})} + \frac{q_{max} - f_{ice} q}{[q(1 - f_{ice})]^2} \right] \cdot \left[ \frac{q_{max}}{q_{max} - f_{ice} q} \right]^c + \left[ \frac{q_{max} - f_{ice} q}{q(1 - f_{ice})} \right]^b \cdot c \cdot \left[ \frac{q_{max}}{q_{max} - f_{ice} q} \right]^{c-1} \cdot \frac{q_{max} f_{ice}}{[q_{max} - f_{ice} q]^2} \right)$$

$$q_k^{\Delta t} = q_k^0 + \frac{\Delta t}{A_k^0(q_k^0, f_{icek}^0, \Psi_{gk}, q_{maxk})} \cdot \left( \frac{\frac{\Pi_{wkh+1}^0}{\rho_w} - \frac{\Pi_{wkh}^0}{\rho_w}}{z_{kh+1} - z_{kh}} \right),$$

$$\frac{\Pi_{wkh}^0}{\rho_w} = K_{kh} \cdot \frac{\Psi_k^0 - \Psi_{k-1}^0}{z_k - z_{k-1}},$$

значение переменных на полуцелых уровнях рассчитываем как среднее арифметическое:

$$x_{kh} = \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_k).$$

В случае если вся почвенная вода замёрзла  $f_{ice}=1$ , гидравлический потенциал нельзя рассчитать (он стремится к бесконечности), тогда просто считается, что поток воды равен нулю: если  $f_{icek}=1$  или  $f_{icek-1}=1$ , то  $\Pi_{wkh}^0=0$ .