Modelli di atmosfera

Vengono descritti alcuni modelli di atmosfera convenzionali per i quali, a seguito di ipotesi, si risolve l'equazione idrostatica ricavando l'andamento della pressione con la quota $p(z)$.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \textit{Equazione} \quad \textit{idrostatica}$$

Integrando dalla quota z al top dell'atmosfera:

$$-\int_{p(z)}^{p(\infty)} dp = \int_{z}^{\infty} \rho g dz$$

Siccome $p(\infty) = 0$, ottengo:

$$p(z) = \int_{z}^{\infty} \rho g dz$$

Questa è l'equazione da risolvere.

Atmosfera omogenea

Ipotesi: densità costante ($\rho = \rho_0$).
È il più semplice modello di atmosfera, ma anche il meno realistico. Integro tra p_0 (pressione al suolo) e p per ottenere un espressione matematica del tipo $p(z)$:

$$-\int_{p_0}^{p} dp = \int_{0}^{z} \rho g dz$$

Risolvo sapendo che $\rho = \rho_0$:

$$p_0 - p = \rho_0 g z \qquad \Rightarrow \qquad p(z) = p_0 - \rho_0 g z$$

Questa è la formula barometrica per un'atmosfera omogenea. Esprime il fatto che la pressione cala linearmente con la quota. L'atmosfera viene ad

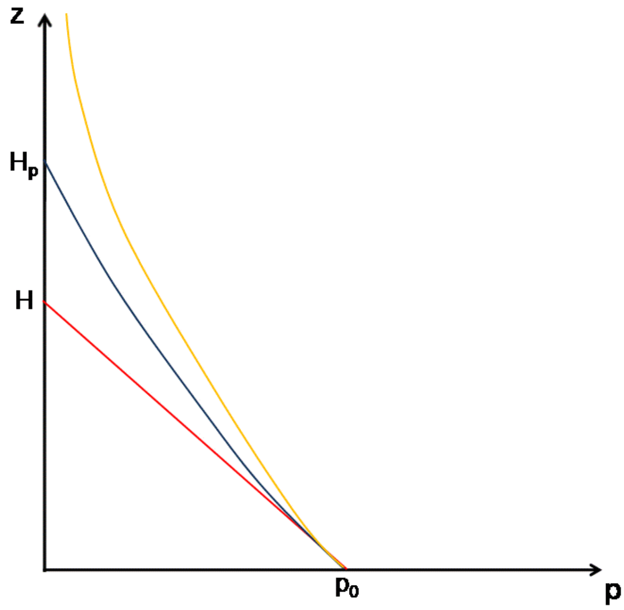

Figura 1: Andamento della pressione con la quota per i tre modelli di atmosfera analizzati. Linea rossa: atmosfera omogenea (ρ costante); linea gialla: atmosfera isoterma (T costante); linea blu: atmosfera politropica (dT/dz costante)

avere uno spessore finito pari ad H=altezza di scala (fig. 1), la quale si ricava determinando la quota alla quale la pressione va a zero:

$$p = 0 = p_0 - \rho_0 g z = p_0 - \rho_0 g H$$

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Dall'equazione dei gas:

$$p_0 = \rho_0 R_d T_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{p_0}{R_d T_0}$$

e sostituendo nella definizione di altezza di scala:

$$H = \frac{R_d T_0}{g}$$

Prendendo una temperatura media del globo di 0°C, ottengo un'altezza di scala $H \simeq 8000m$ Essendo la densità costante, anche la temperatura cala linearmente con la quota. Dall'equazione dei gas scritta sopra:

$$T = \frac{p}{R_d \rho_0}$$

Calcolo il gradiente verticale di temperatura:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{R_d\rho_0}\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0 g}{R_d\rho_0} = -\frac{g}{R_d} \simeq -3.42°/100m$$

Se l'atmosfera fosse omogenea, la sua temperatura calerebbe di 3.42 gradi ogni 100 metri, ovvero di oltre 30 gradi per km, che è un valore enorme (in troposfera mediamente il gradiente vale 6.5 gradi per km). È chiaro che questo modellino è applicabile solo a un piccolo strato di atmosfera.

Atmosfera isoterma

Ipotesi: $T = T_0 = cost$
Inserisco l'equazione dei gas nell'equazione idrostatica:

$$p = \rho R_d T \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p}{R_d T}$$

$$-dp = \rho g dz = g\frac{p}{R_d T}dz$$

Integro sapendo che $T = T_0$ e considerando g costante:

$$-\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = \int_0^z \frac{g}{R_d T_0}dz$$

Ottengo:

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R_d T_0}z} = p_0 e^{-\frac{z}{H}} \qquad H = \frac{R_d T_0}{g} = altezza \quad di \quad scala$$

L'altezza di scala rappresenta la quota alla quale la pressione si riduce di un fattore 1/e. Per un'atmosfera isoterma la pressione cala esponenzialmente con la quota (fig. 1). Inoltre l'altezza di un'atmosfera isoterma risulta essere infinita in quanto $p \to 0$ solo per $z \to \infty$. Per l'equazione dei gas, essendo la temperatura costante, anche la densità ha un andamento esponenziale analogo alla pressione.

Atmosfera politropica

È un'atmosfera caratterizzata da un gradiente verticale di temperatura costante.
Ipotesi: $-\frac{dT}{dz} = \gamma = costante$

Quindi $T = T_0 - \gamma z$
Integro l'equazione idrostatica:

$$-\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z \frac{g}{R_d T(z)} dz$$

da cui:

$$\ln p = \ln p_0 - \frac{g}{R_d} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \gamma z}$$

Risolvendo l'integrale ottengo la seguente espressione per la pressione:

$$\frac{p}{p_0} = \Big(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\Big)^{\frac{g}{\gamma R_d}}$$

Si è così ottenuto un andamento di $p(z)$ che è intermedio tra i due modelli precedenti (fig. 1). L'atmosfera politropica ha un'altezza finita, pari a $H_p = \frac{T_0}{\gamma}$. Questo modello di atmosfera è quello in cui l'andamento della pressione con la quota più si avvicina alla realtà.