Applicazioni dell'equazione del moto: equazioni del moto in coordinate isobariche

Per avere delle equazioni prognostiche devo considerare il termine successivo nell'analisi di scala, ovvero l'accelerazione orizzontale:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = fv - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = f\left(v - v_g\right) \\ \dfrac{dv}{dt} = -fu - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = -f\left(u - u_g\right) \end{cases} \Longrightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} + f\hat{k}\times\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

(forma vettoriale)

Utilizzando la pressione, anziché z, come coordinata verticale:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\hat{k}\times\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} + f\hat{k}\times\vec{V} = -\nabla_p \phi$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

In coordinate isobariche il vento geostrofico diventa:

$$f\vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla_p \phi$$

Vento geostrofico in coordinate isobariche: la densità non compare esplicitamente quindi un uguale gradiente di geopotenziale implica un uguale vento geostrofico ad ogni quota. Prima invece un uguale gradiente di pressione generava differenti venti geostrofici a seconda della densità dell'aria.

Inoltre se f è costante, il vento geostrofico ha divergenza orizzontale nulla

$$\nabla_p \cdot \vec{V}_g = 0$$

In coordinate isobariche l'equazione di continuità assume una forma assai semplice, dove non compaiono né la densità, né le derivate temporali:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p = \nabla \cdot \vec{V}_h = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

La divergenza orizzontale su una superficie isobarica è direttamente legata al moto verticale (ω) il quale è un elemento fondamentale nel determinare il "tempo meteorologico"

VENTO AGEOSTROFICO

$$\vec{V}_{ag} = \vec{V} - \vec{V}_g$$

Rappresenta il grado di approssimazione rispetto al vento reale che si ha considerando il bilancio geostrofico

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f\left(v - v_g\right) = fv_{ag}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -f\left(u - u_g\right) = -fu_{ag}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = f\hat{k} \times \vec{V}_{ag}$$

Il vento ageostrofico è associato a regioni caratterizzate da accelerazione lagrangiana del vento (es: jet streak)

Dall'equazione di continuità in coordinate isobariche:

$$\nabla \cdot \vec{V}_h = \nabla \cdot \left(\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}\right) = \nabla \cdot \vec{V}_g + \nabla \cdot \vec{V}_{ag} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Se f è costante il vento geostrofico ha divergenza nulla, quindi:

$$\nabla \cdot \vec{V}_{ag} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

La divergenza del vento ageostrofico determina la distribuzione dei moti verticali in atmosfera. E' quindi il vento ageostrofico totalmente responsabile della distribuzione di cicloni, anticicloni, nubi e precipitazioni.

Nonostante l'atmosfera alle medie latitudini si trovi prevalentemente in bilancio geostrofico, tutto il "tempo meteorologico" è un risultato diretto della piccola porzione di vento detta vento ageostrofico.

COORDINATE NATURALI

$\hat{t}$ parallelo alla velocità orizzontale

$\hat{n}$ perpendicolare alla velocità orizzontale, positivo a sinistra rispetto al moto

$\hat{k}$ diretto verticalmente verso l'alto

$$V = V\,\hat{t}$$

$$V > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{V^2}{R} + fV = -\dfrac{\partial \phi}{\partial n} \end{cases}$$

variazione della velocità della particella d'aria

accelerazione centripeta dovuta alla curvatura

R>0 se $\hat{n}$ è diretto verso il centro (antiorario)

L'utilità di questo sistema di riferimento sta nel fatto che permette di trattare separatamente la parte di accelerazione dovuta alla variazione del modulo della velocità e la parte legata alla variazione della direzione

Ipotesi: 1) moto parallelo alle isolinee di geopotenziale

2) gradiente di geopotenziale normale alla direzione del moto costante

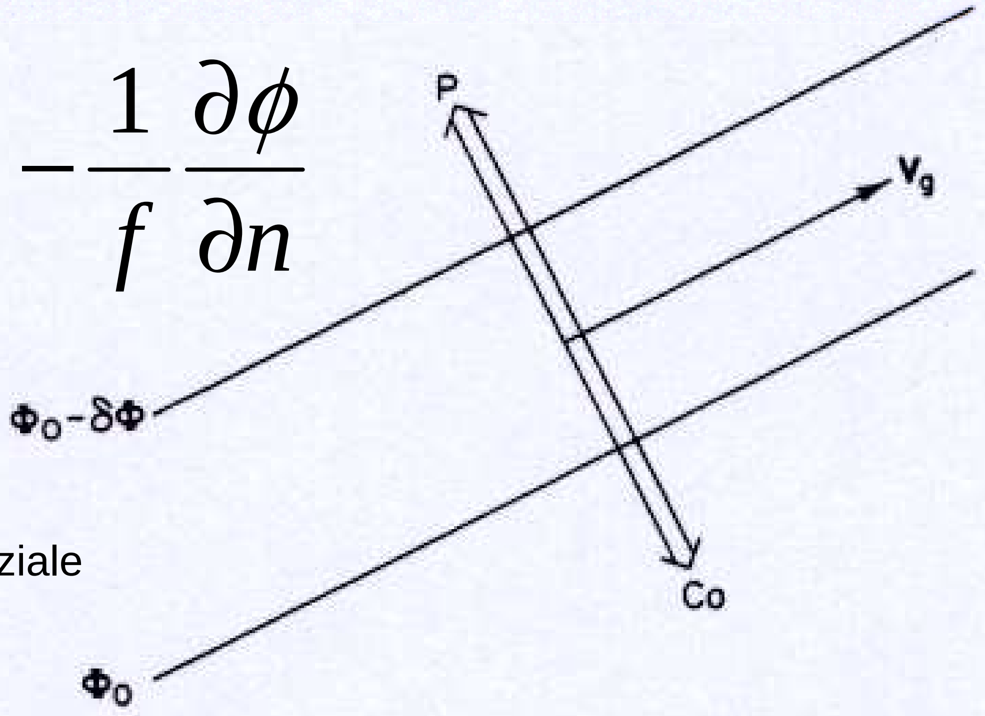
$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \qquad \rightarrow \text{velocità costante}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \cos t. \qquad \rightarrow \text{raggio di curvatura costante}$$

In queste condizioni il flusso può essere classificato in alcune semplici categorie, dipendenti dal contributo dei termini presenti nelle equazioni. Nonostante l'apparente forte approssimazione, si ottengono flussi che descrivono bene fenomeni rilevanti per i moti a larga scala alle medie latitudini

Flusso geostrofico

$$fV_g = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \Rightarrow V_g = -\frac{1}{f}\frac{\partial \phi}{\partial n}$$



Flusso rettilineo (R→∞)

Flusso parallelo alle isolinee di geopotenziale

Flusso inerziale: bilancio fra forza di Coriolis e centrifuga

Geopotenziale uniforme su una superficie isobarica (gradiente orizzontale nullo)

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0$$

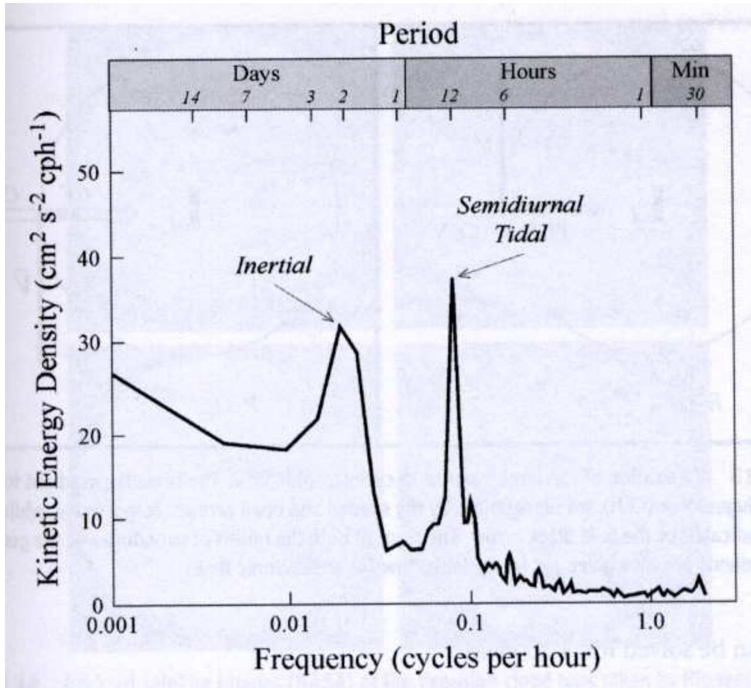
$$R = -\frac{V}{f}$$

Esempio: flusso di un fluido in un bacino d'acqua duvuto allo stress di vento sulla superficie → correnti oceaniche

Siccome V è costante, per R sufficientemente piccoli da poter considerare f costante, le traiettorie sono puri moti inerziali che seguono un percorso circolare e anticiclonico (orario) il cui periodo risulta:

$$P = \left|\frac{2\pi R}{V}\right| = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \sin\phi}$$

Evidente nello spettro di energia dei moti oceanici con periodo di circa 2 giorni a 13N di latitudine



Flusso ciclostrofico: scala orizzontale piccola → trascuro la forza di Coriolis

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$$V = \sqrt{-R\frac{\partial \phi}{\partial n}}$$

Il vento ciclostrofico può essere sia anticiclonico che ciclonico attorno ad un centro di bassa pressione (vedi pag. successiva)

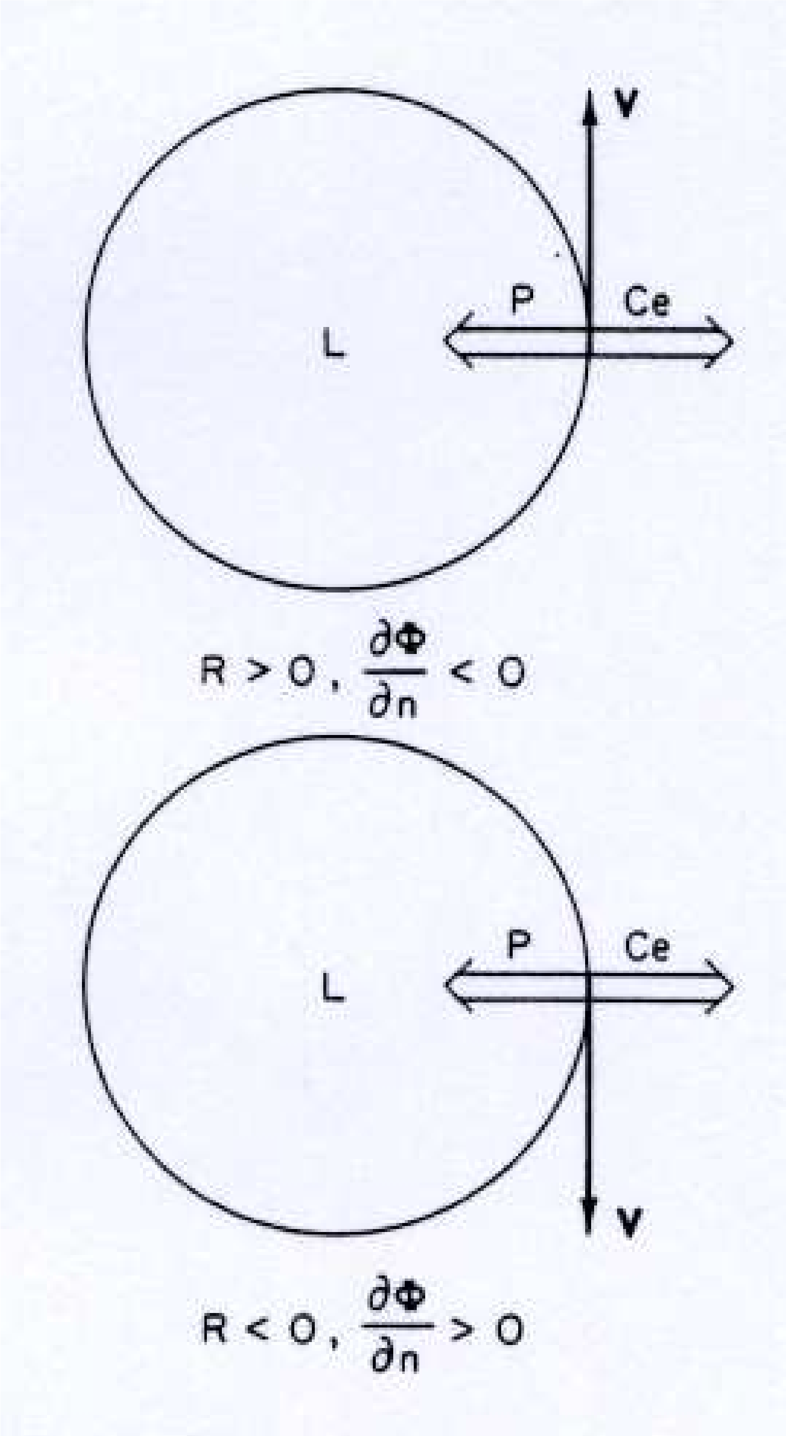
Validità del bilancio ciclostrofico: rapporto fra forza centrifuga e forza di Coriolis:

$$\frac{V^2/R}{fV} = \frac{V}{fR} = R_o$$

Il bilancio ciclostrofico è l'equilibrio "preferito" per numeri di Rossby grandi

Esempio: tornado e dust devil

$$\left.\begin{array}{l} v = 30 \text{ m/s} \\ R = 300 \text{ m} \\ f = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Ro} = 10^3$$



$$R > 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$$

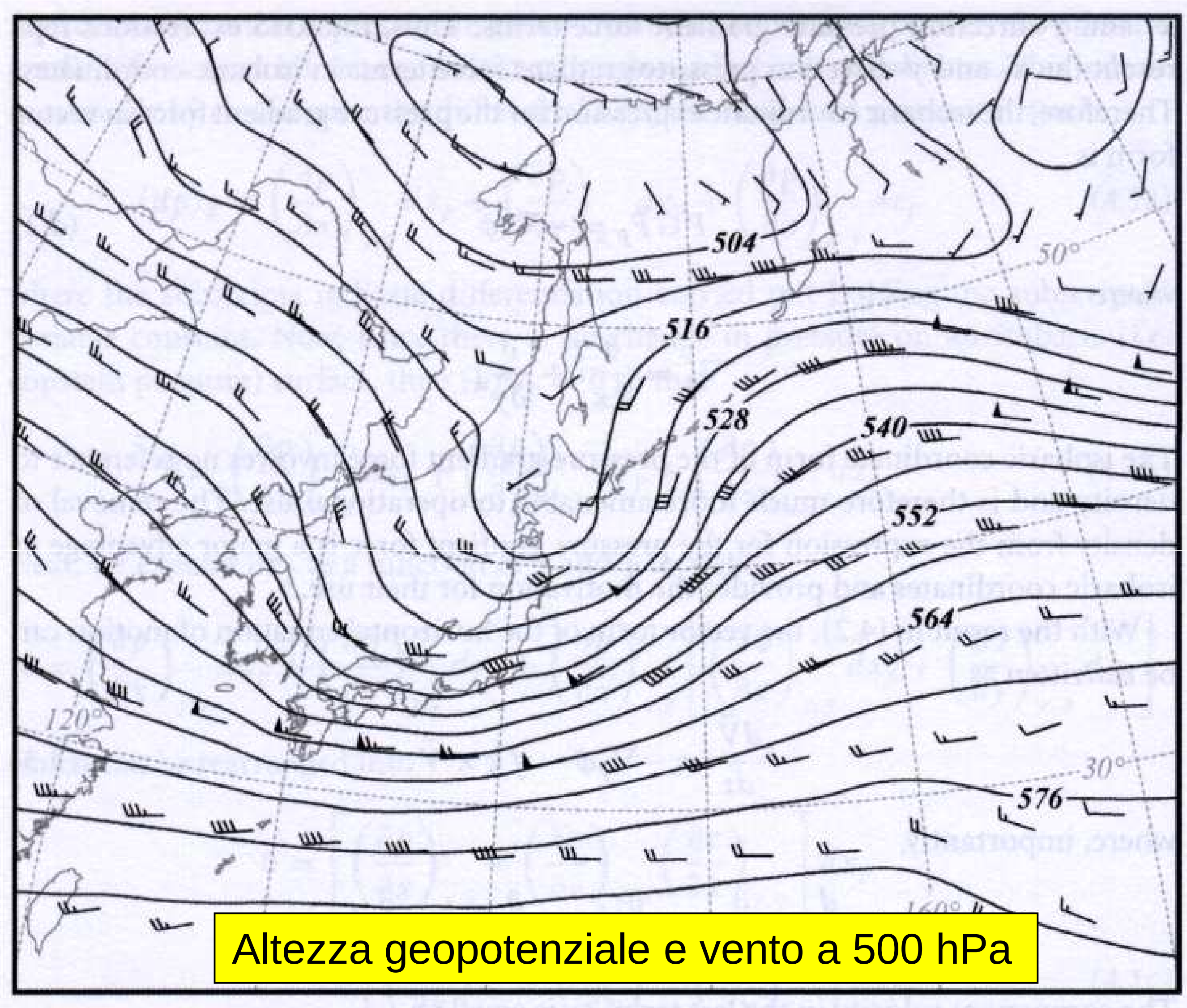
ciclonico (antiorario)

$$R < 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0$$

anticiclonico (orario)

VENTO DI GRADIENTE



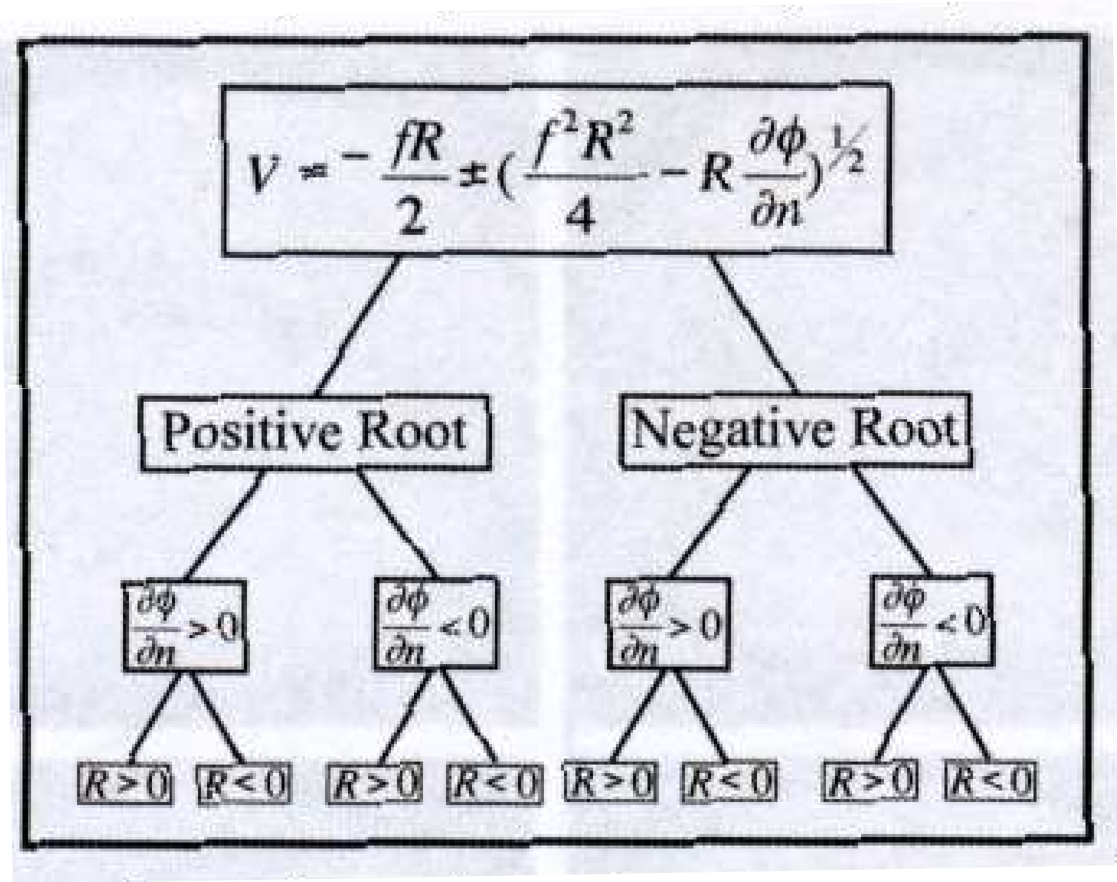
Altezza geopotenziale e vento a 500 hPa

Sebbene le traiettorie siano curve e non rettilinee, il vento orizzontale scorre spesso parallelo alle isolinee di altezza geopotenziale → vento di gradiente

VENTO DI GRADIENTE: flusso orizzontale, senza attrito, parallelo alle isolinee di Φ
E' chiaramente un'approssimazione migliore di quella geostrofica del vento reale

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - R\frac{\partial \phi}{\partial n}}$$



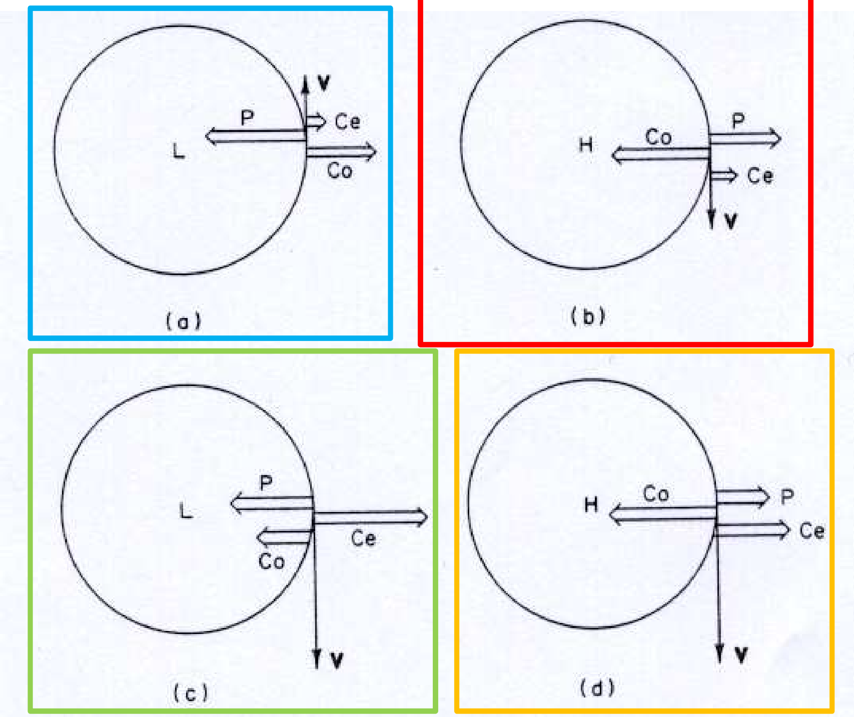
Soluzioni possibili dal punto di vista fisico devono soddisfare le seguenti condizioni:

1) V reale
2) V > 0 (per definizione del sistema di coordinate naturali)

Table 3.1 *Classification of Roots of the Gradient Wind Equation in the Northern Hemisphere*[a]

Sign $\partial\Phi/\partial n$	$R>0$	$R<0$
Positive	Positive root: unphysical	Positive root: antibaric flow (anomalous low)
	Negative root: unphysical	Negative root: unphysical
Negative	Positive root: cyclonic flow (regular low)	Positive root: $(V>-fR/2)$: anticyclonic flow (anomalous high)
	Negative root: unphysical	Negative root: $(V<-fR/2)$: anticyclonic flow (regular high)

[a] The terms *positive root* and *negative root* in columns 2 and 3 refer to the sign taken in the final term in (3.15).



(a) Regular low

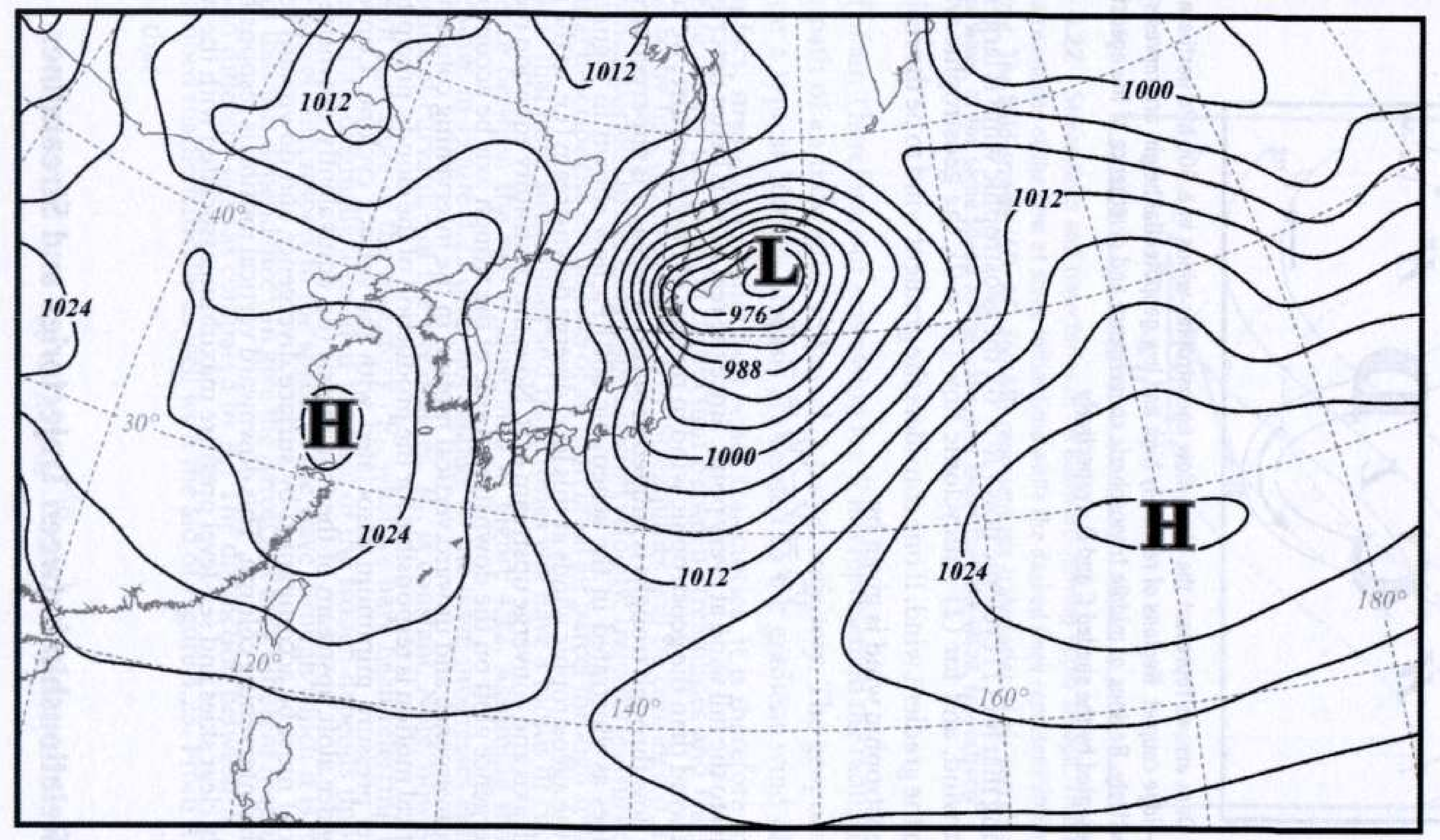
(b) Regular high

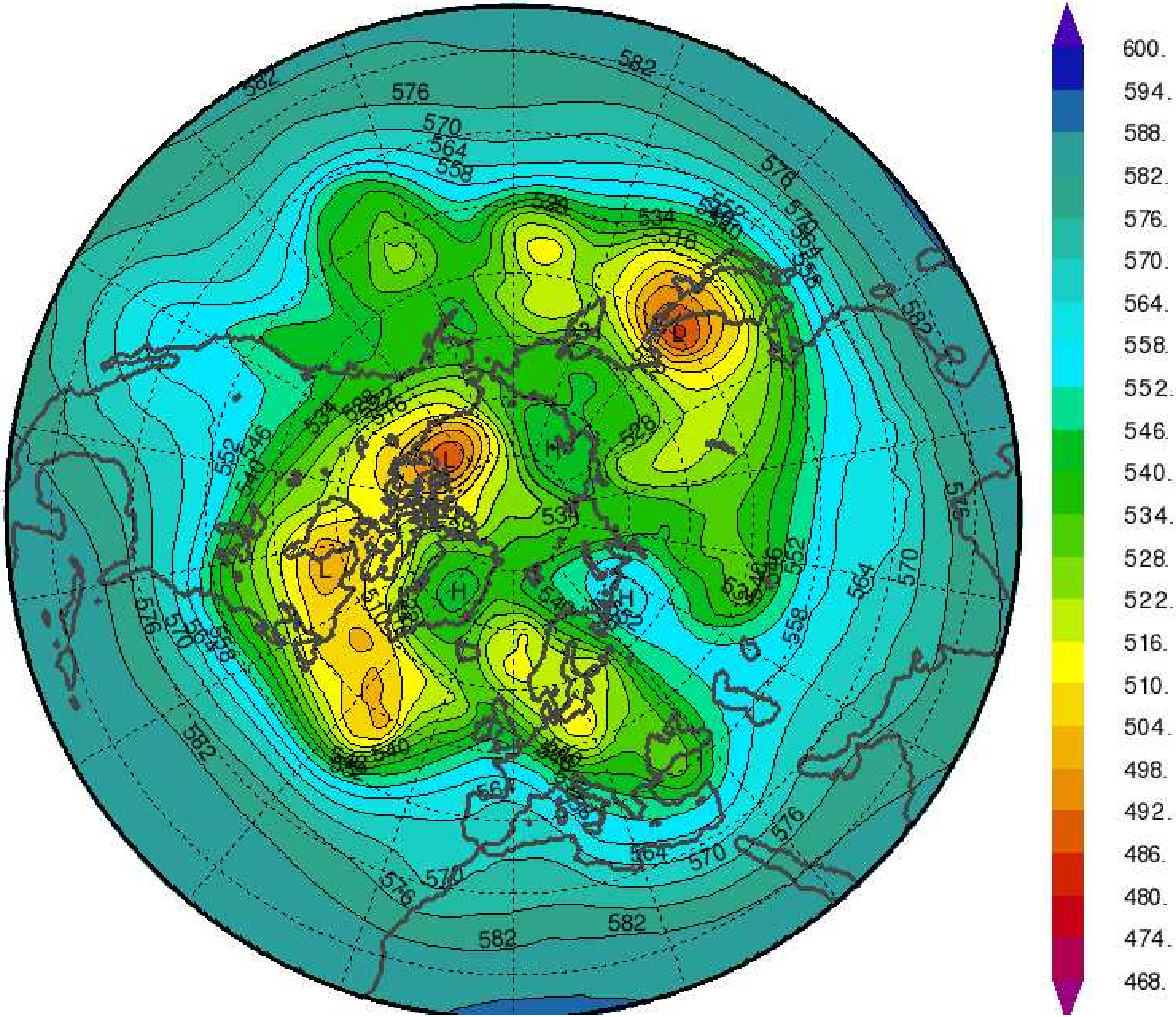
(c) Anomalous low

(d) Anomalous high

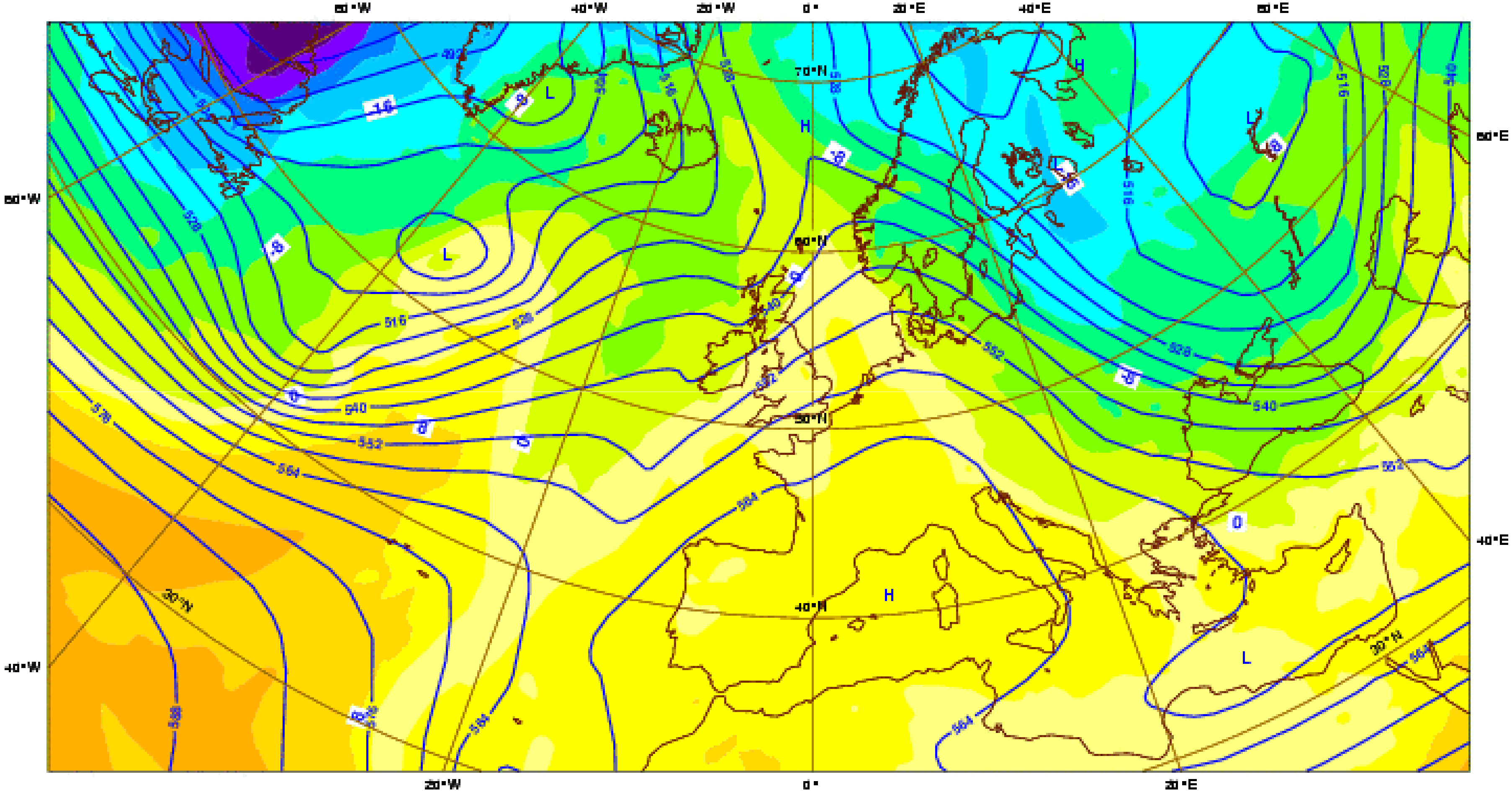
Per alte pressioni: $\left|\frac{\partial \phi}{\partial n}\right| < \frac{|R| f^2}{4}$ quindi per $R \to 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial n} \to 0$

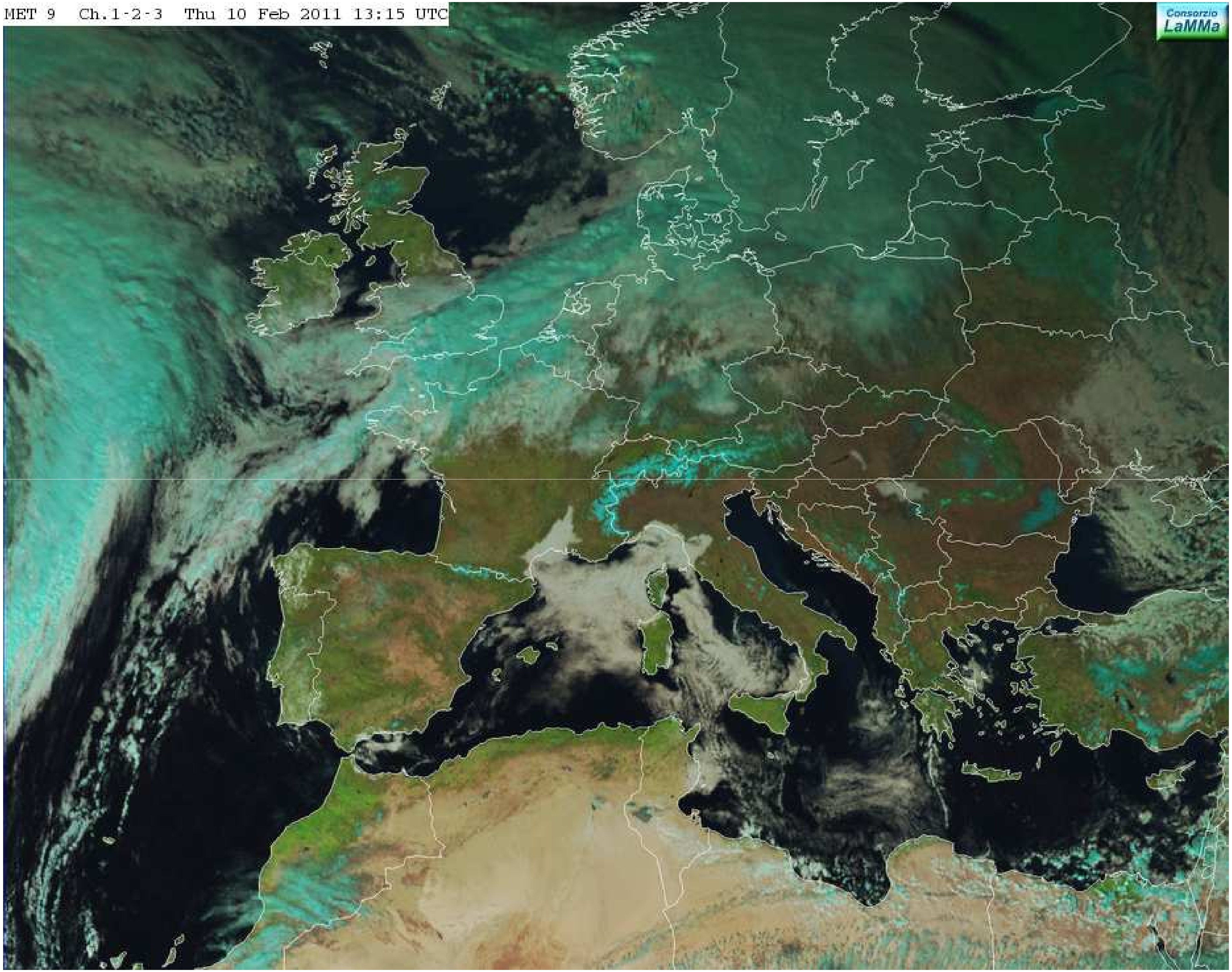
Il campo di pressione vicino ad un centro di alta pressione è piatto, con venti deboli/nulli




600.
594.
588.
582.
576.
570.
564.
558.
552.
546.
540.
534.
528.
522.
516.
510.
504.
498.
492.
486.
480.
474.
468.
582
576
570
564
558
L
H

Thursday 10 February 2011 00UTC ©ECMWF Analysis t+000 VT: Thursday 10 February 2011 00UTC
850 hPa Temperature / 500 hPa Geopotential




MET 9 Ch.1-2-3 Thu 10 Feb 2011 13:15 UTC
Consorzio
LaMMa

Definisco:

FLUSSO CICLONICO (antiorario) quando la forza centrifuga e quella di Coriolis hanno stessa direzione (fR>0)
FLUSSO ANTICICLONICO (orario) quando la forza centrifuga e quella di Coriolis hanno direzione opposta (fR<0)

Il regular low ha flusso ciclonico, il regular high ha flusso anticiclonico, da cui prendono il nome i cicloni e gli anticicloni tipici delle medie latitudini.

Dall'equazione del vento di gradiente, inserendo V_g, dividendo per fV:

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR} \quad \Longrightarrow$$

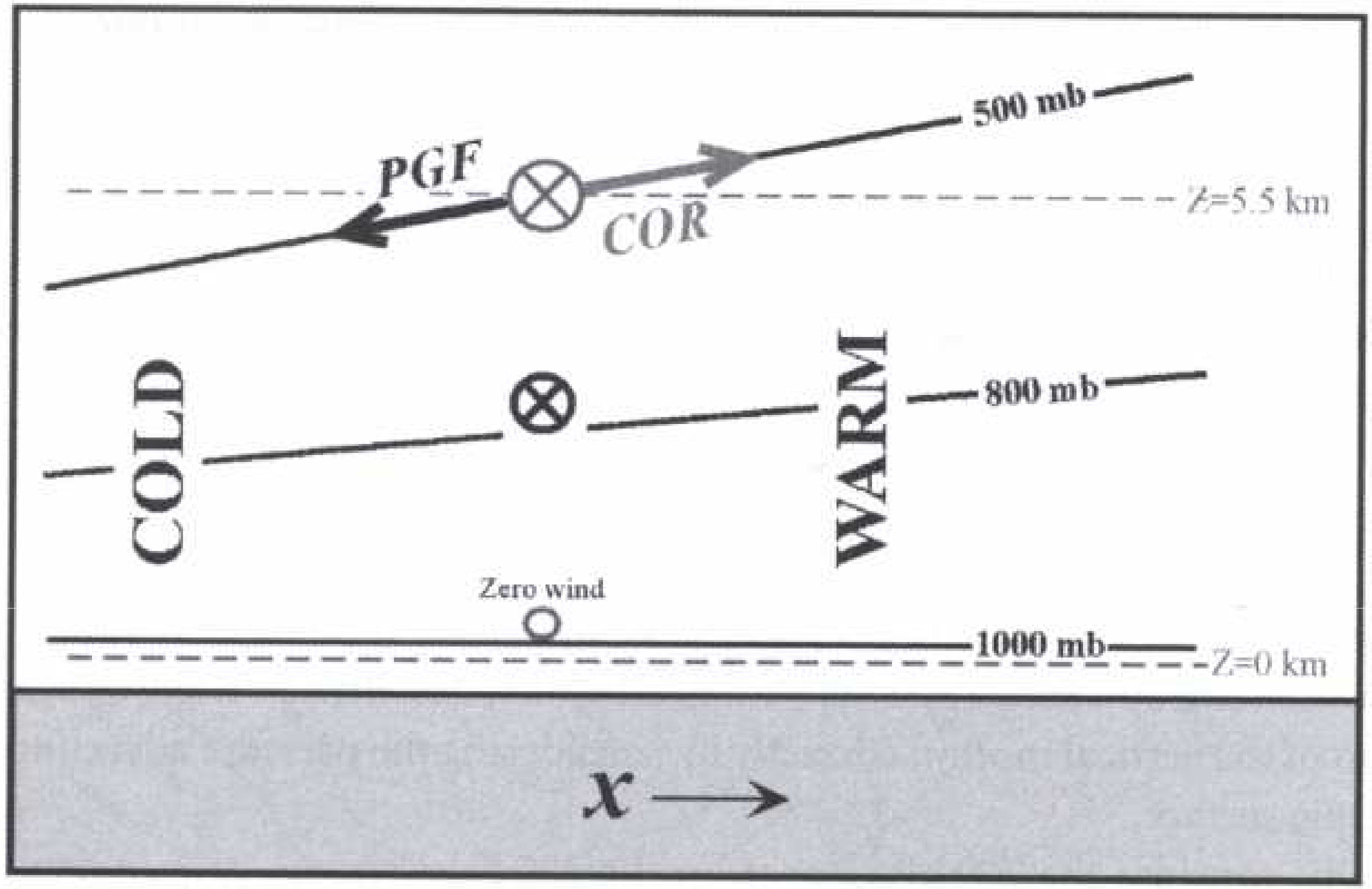
1) Per flusso ciclonico (fR>0) → $V_g > V$
2) Per flusso anticiclonico (fR<0) → $V_g < V$

il vento geostrofico sovrastima il vento di gradiente in un flusso ciclonico, lo sottostima in un flusso anticiclonico.
Per una curvatura ciclonica il vento reale è sub-geostrofico
Per una curvatura anticiclonica il vento reale è super-geostrofico
Si generano così convergenza e divergenza in quota che per l'equazione di continuità si traducono in moti verticali.

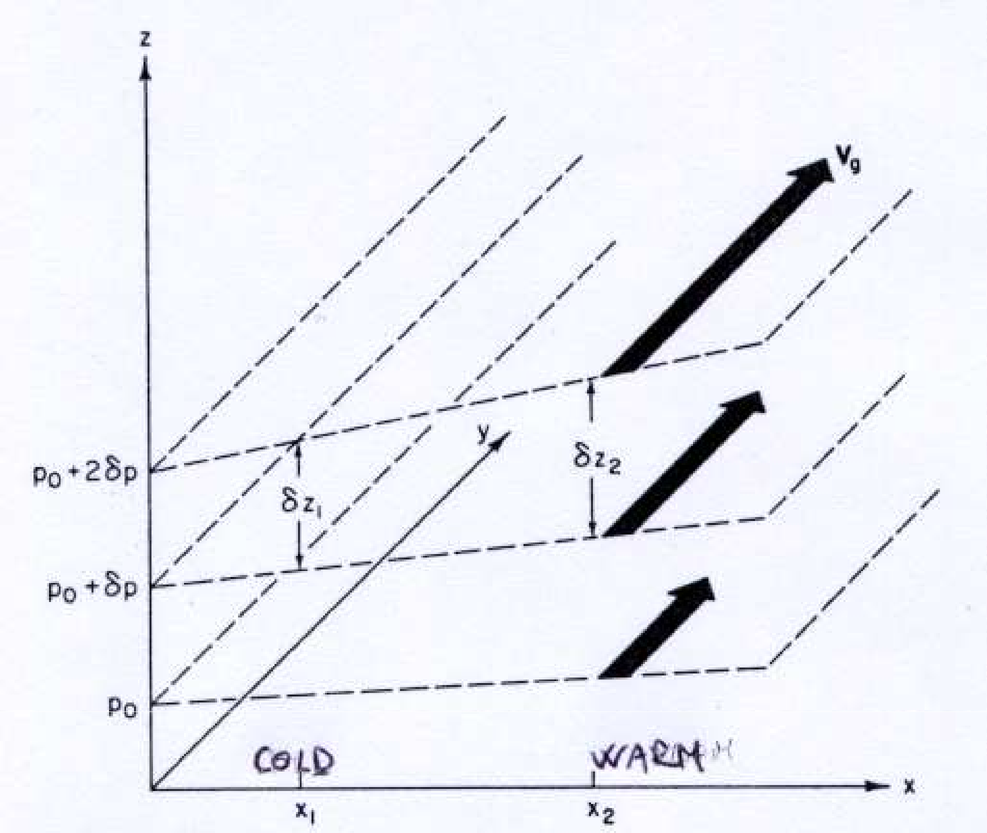
$$V_{ag} = V - V_g = -\frac{V^2}{fR}$$

$V_{ag} < 0$ per flusso ciclonico
$V_{ag} > 0$ per flusso anticiclonico

VENTO TERMICO



Il vento geostrofico può avere uno shear verticale se c'è un gradiente orizzontale di T
Dall'equazione ipsometrica:
gradiente orizzontale di T → crescente pendenza delle superfici isobariche → crescente gradiente di geopotenziale lungo le superfici isobariche →
vento geostrofico che cresce con la quota → shear verticale di vento geostrofico



EQUAZIONE DI VENTO TERMICO

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = -\frac{R}{fp}\hat{k} \times \nabla_p T$$

Per avere uno shear verticale di vento geostrofico occorre un gradiente orizzontale di temperatura

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\hat{k} \times \nabla_p T$$

-Strumento diagnostico utile per verificare la consistenza dei campi di vento e temperatura nelle analisi
-Permette di stimare l’avvezione termica in uno strato di atmosfera

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial x}$$

Integrando tra p_0 e p_1

$$\vec{V}_T = \frac{1}{f}\hat{k}\times\nabla\left(\Phi_1 - \Phi_0\right)$$

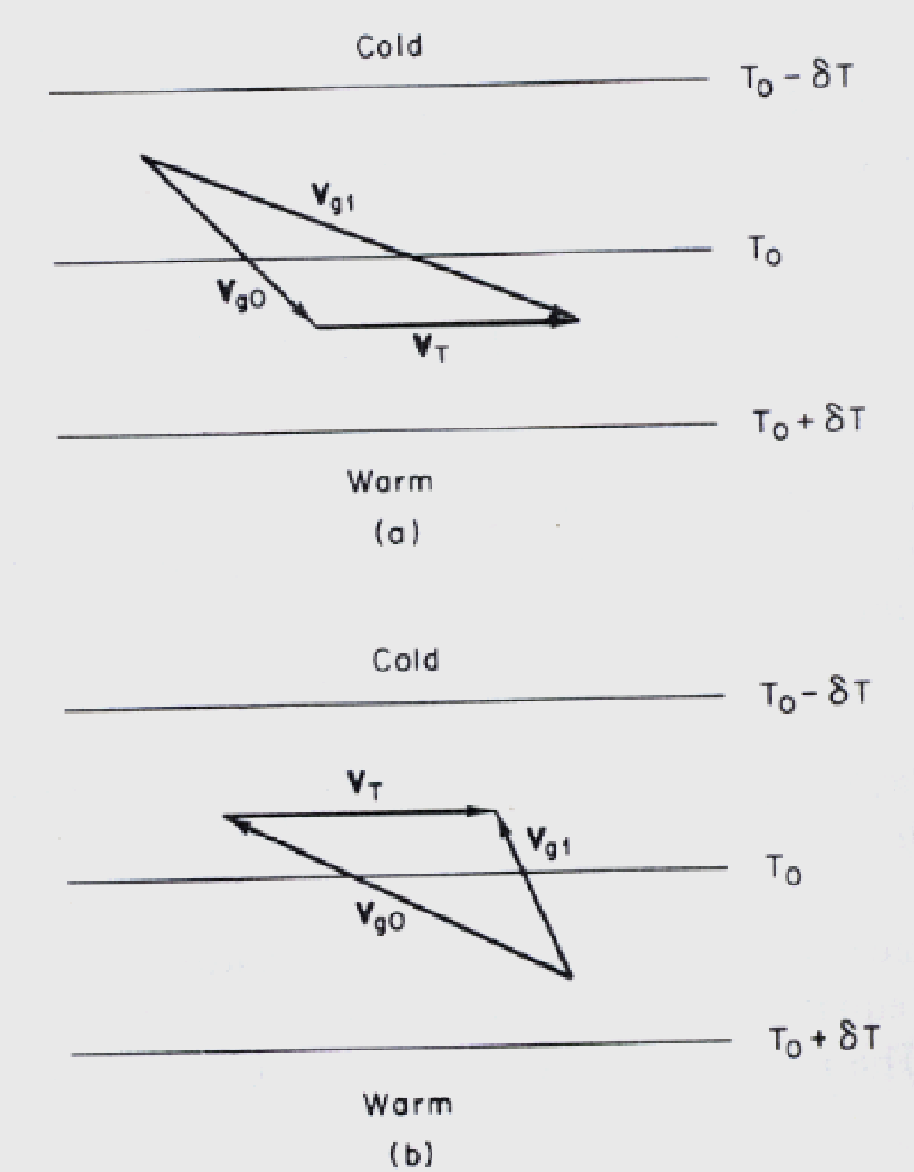
Analogia formale con il vento geostrofico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f}\hat{k}\times\nabla_p\Phi$$

Il vento geostrofico scorre parallelo alle isolinee di geopotenziale con i bassi valori a sinistra (nell'emisfero nord)

Il vento termico scorre parallelo alle isolinee di uguale spessore, ovvero di uguale temperatura, con i bassi valori sulla sinistra (nell'emisfero nord)

Il vento termico permette di stimare l'avvezione termica in uno strato



Se il vento geostrofico ruota in senso antiorario con la quota → avvezione fredda

Se il vento geostrofico ruota in senso orario con la quota → avvezione calda

Si definisce **ATMOSFERA BAROTROPICA** un'atmosfera in cui la densità dipende solo dalla pressione ρ = ρ(p). In tal caso le superfici isobariche sono anche superfici di densità costante.
Per un gas ideale in atmosfera barotropica le superfici isobariche sono anche isoterme, quindi

$\nabla_p T = 0$ e l'equazione di vento termico diventa $\dfrac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln p} = 0$

ovvero il vento geostrofico è costante con la quota in un'atmosfera barotropica

Si definisce **ATMOSFERA BAROCLINA** un'atmosfera in cui la densità dipende sia dalla temperatura che dalla pressione ρ = ρ(p,T). In un'atmosfera baroclina il vento geostrofico presenta una shear verticale la cui intensità è legata al gradiente orizzontale di temperatura attraverso l'equazione di vento termico.

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\hat{k} \times \nabla_p T$$

L'atmosfera baroclina è di primaria importanza in meteorologia dinamica.