Equazione del momento per un sistema di riferimento ruotante

Bisogna innanzi tutto determinare la relazione fra le derivata totale di un vettore in un sistema di riferimento inerziale e ruotante con velocità angolare Ω.

$$\frac{d_a\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{A}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{A} = A_x'\hat{i}' + A_y'\hat{j}' + A_z'\hat{k}'$$

la applico per A=r

$$\frac{d_a\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{r} \Rightarrow \vec{U}_a = \vec{U} + \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

La velocità assoluta è data dalla somma della velocità dell'oggetto e della velocità dovuta alla rotazione terrestre

la applico per A=U_a

$$\frac{d_a\vec{U}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{U} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{U} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

$$\boxed{\frac{d_a\vec{U}_a}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} + \underbrace{2\vec{\Omega}\times\vec{U}}_{\text{CORIOLIS}} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)}_{\text{CENTRIFUGA}}}$$

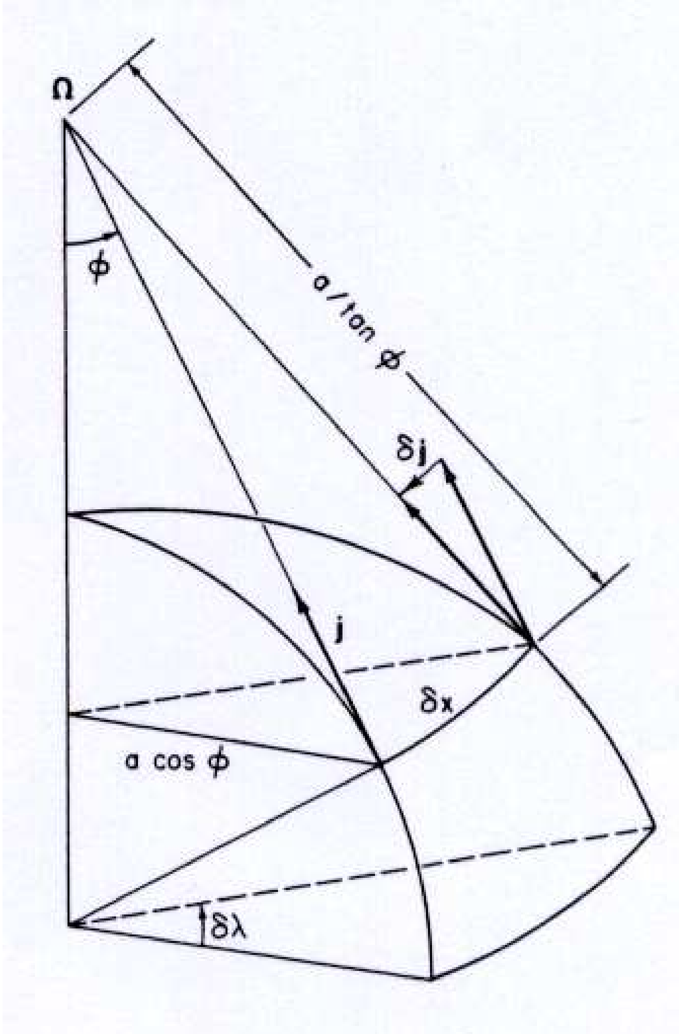
L'accelerazione vista dal sistema di riferimento inerziale è uguale alla somma della variazione nel tempo della velocità relativa vista dal sistema ruotante + l'accelerazione di Coriolis + l'accelerazione centrifuga

A questo punto posso scrivere **l'equazione per il momento**

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega}\times\vec{U} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_r$$

<u>Eq. del momento in coordinate sferiche</u>:
λ=longitudine
Φ=latitudine
z=distanza verticale dalla sfc

i diretto verso est
j diretto verso nord
k diretto verso l'alto



$$\frac{du}{dt} - \frac{uv\tan\phi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v\sin\phi - 2\Omega w\cos\phi + F_{rx}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2\tan\phi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u\sin\phi + F_{ry}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u\cos\phi + F_{rz}$$

ANALISI DI SCALA

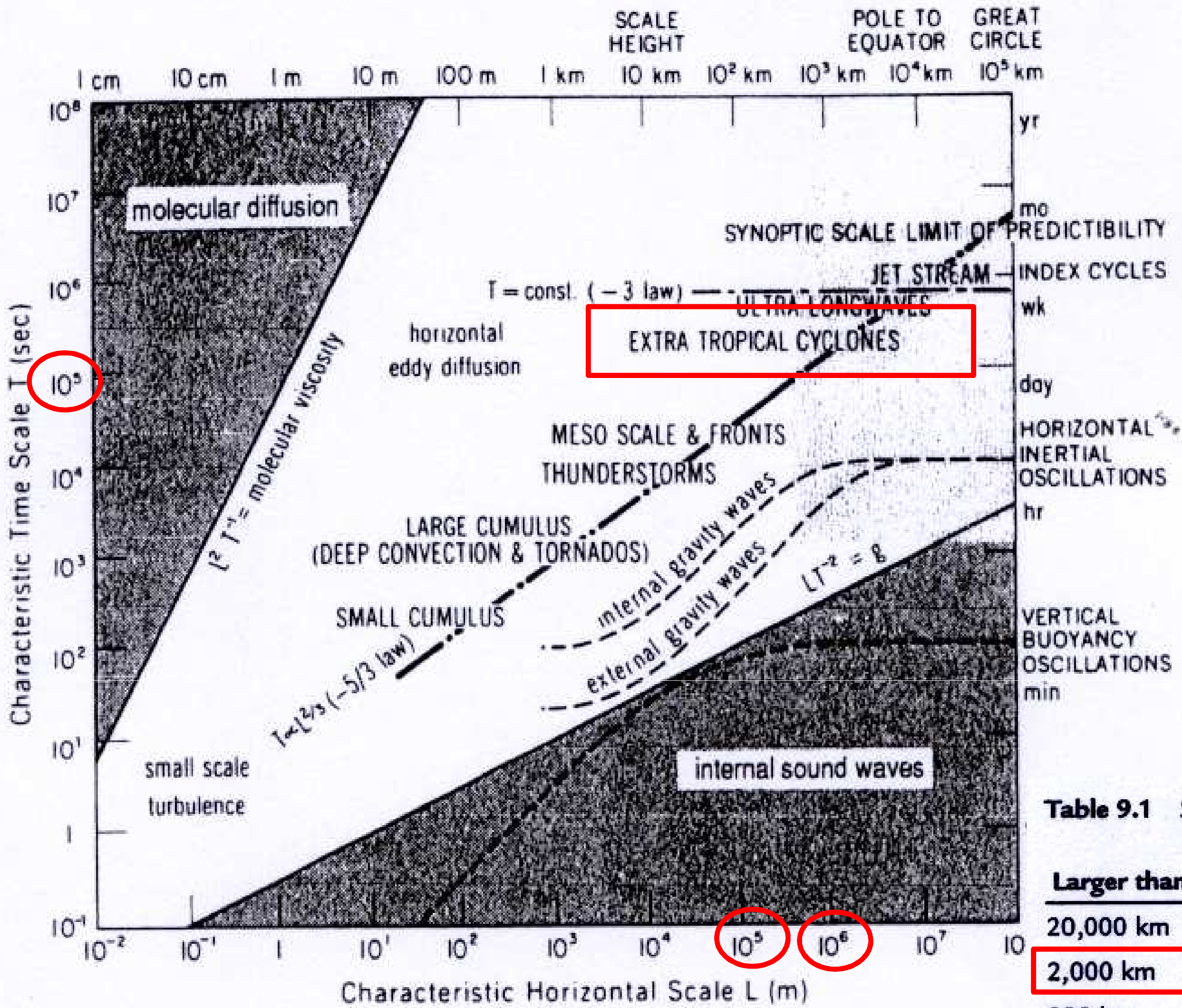


Fig. 6.2 Diagram showing the space and time scales of phenomena in the atmospher
represents approximately scales that can be resolved in climate models. [From Smagorin

Table 9.1 Scales of horizontal motion in the atmosphere

Larger than	Scale	Name
20,000 km		Planetary scale
2,000 km		Synoptic scale
200 km	Meso-α	Mesoscale
20 km	Meso-β	Mesoscale
2 km	Meso-γ	Mesoscale
200 m	Micro-α	Boundary-layer turbulence
20 m	Micro-β	Surface-layer turbulence
2 m	Micro-γ	Inertial subrange turbulence
2 mm	Micro-δ	Fine-scale turbulence
Air molecules	Molecular	Viscous dissipation subrange

Analisi di scala per moti a scala sinottica

Valori di scala caratteristici
U = velocità orizzontale = 10 m/s
W= velocità verticale = 1 cm/s
L = lunghezza-estensione orizzontale = 10^6 m
H = profondità = 10^4 m
L/U = scala temporale dei moti avvettivi = 10^5 s → per valutare $D/Dt \sim 1/\Delta t \sim U/L$
$f = f_0 = 2\Omega\sin\Phi_0 = 10^{-4}$ s (a 45° latitudine)
$\Delta p/\rho$ = fluttuazioni orizzontali di pressione = $10^3\ m^2/s^2$

Le fluttuazioni orizzontali di pressione vengono normalizzate con la densità in modo da avere una stima valida in tutta la troposfera, nonostante il calo esponenziale con la quota.
$\Delta p/\rho$ ha l'unità di misura del geopotenziale e in effetti può essere interpretata come la fluttuazione di geopotenziale su una superficie isobarica.
Il valore di $\Delta p/\rho$ è proprio quanto ci si aspetta considerando le variazioni che intercorrono tra due sistemi sinottici adiacenti. Se infatti considero $\rho = 1$ ottengo
$\Delta p/\rho$ = 1000 Pa = 10 hPa

$$\frac{du}{dt}-\frac{uv\tan\phi}{a}+\frac{uw}{a}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi+F_{rx}$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{u^2\tan\phi}{a}+\frac{vw}{a}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-2\Omega u\sin\phi+F_{ry}$$

$$\frac{dw}{dt}-\frac{u^2+v^2}{a}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+2\Omega u\cos\phi+F_{rz}$$

Table 2.1 *Scale Analysis of the Horizontal Momentum Equations*

	A	B	C	D	E	F	G
x-Eq.	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v\sin\phi$	$+2\Omega w\cos\phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv\tan\phi}{a}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
y-Eq.	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u\sin\phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2\tan\phi}{a}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	f_0U	f_0W	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{\nu U}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	$\cancel{10^{-12}}$

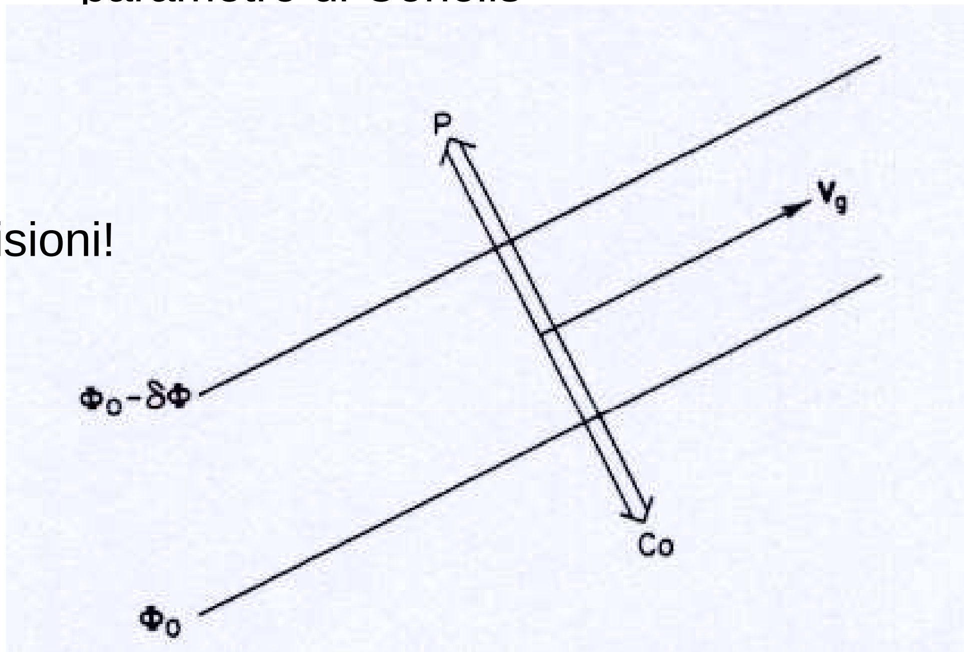
Approssimazione geostrofica e vento geostrofico

$$- fv \approx -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$f = 2\Omega \sin\phi$ = parametro di Coriolis

$$fu \approx --\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

E' un'espressione diagnostica, no previsioni!



$$\vec{V}_g = u_g \hat{i} + v_g \hat{j} = \hat{k} \times \frac{1}{\rho f}\nabla p$$

= **VENTO GEOSTROFICO**

-E' un'approssimazione dei moti orizzontali a grande scala, ma solo lontano dell'equatore (all'equatore f=0).
-Alle medie latitudini, in libera atmosfera riproduce il moto orizzontale con un'approssimazione del 10-15%.
- Soffia parallelo alle isolinee di pressione costante, lasciando i bassi valori di pressione sulla sinistra.

$$R_o = \frac{U}{f_0 L}$$ = **Numero di Rossby**

L'approssimazione geostrofica è valida per $R_0 \ll 1$

Analisi di scala per la componente verticale:
Valori di scala caratteristici
$\Delta P/\Delta z = P_0/H$ = gradiente verticale di pressione $=10^5$ Pa / 10^4 m

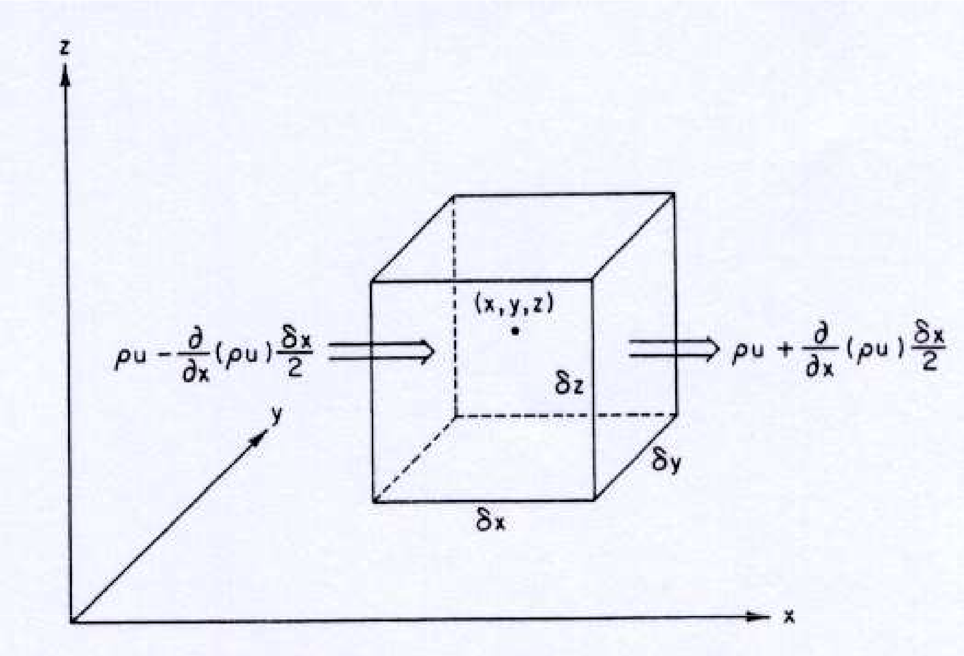
→ approssimazione idrostatica

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos\phi + F_{rz}$$

Table 2.2 *Scale Analysis of the Vertical Momentum Equation*

z-Eq.	Dw/Dt	$-2\Omega u \cos\phi$	$-(u^2+v^2)/a$	$= -\rho^{-1}\partial p/\partial z$	$-g$	$+F_{rz}$
Scales	UW/L	$f_0 U$	U^2/a	$P_0/(\rho H)$	g	$\nu W H^{-2}$
m s^{-2}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10	10	10^{-15}

Equazione di continuità: conservazione della massa



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{U} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{U} = 0$$

Equazione termodinamica: conservazione dell'energia

$$c_V \frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} = J$$